Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

Pertemuan 11 : Filter Wiener

Oleh : Koredianto Usman

Versi : Januari 2020

Filter Wiener

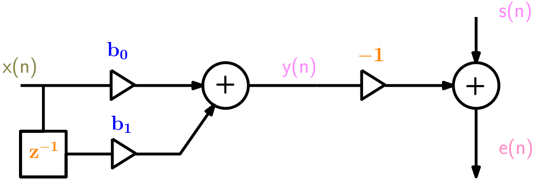
1. Filter Wiener adalah filter yang didesain agar output dari filter adalah sedekat mungkin dengan sinyal target.
2. Sedekat mungkin dalam arti MSE antara sinyal keluaran filter dengan target adalah minimal
3. Misalkan input filter adalah **x(n)**.
4. Filter adalah FIR orde M (dengan koefisien $b_0 \ldots b_M$)
5. Keluaran filter adalah $y(n)$
6. Sinyal referensi ada $\mathbf{s}(\mathbf{n})$
7. Desain filter Wiener adalah mencari $b_0 \ldots b_M$) sedemikian sehingga:

$$MSE = \frac{1}{N}\left[[s(0) - y(0)]^2 + \cdots + [s(N-1) - y(N-1)]^2\right]$$

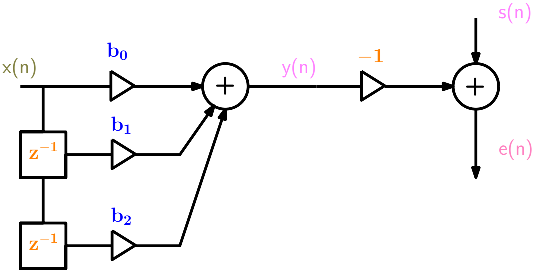
   menjadi minimum.
8. N adalah panjang sinyal

Filter Wiener : Struktur

1. Struktur Filter Wiener Orde 1

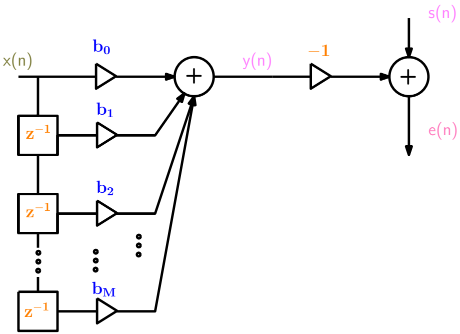


2. Struktur Filter Wiener Orde 2



Filter Wiener : Struktur

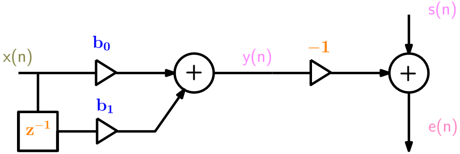
1. Struktur Filter Wiener Orde M



2. Jika diberikan **x**(**n**) dan **y**(**n**), bagaimana mencari $b_0 \ldots b_M$
3. sedemikian sehingga MSE = $\sum_{n=1}^{N} e^2(n)$ minimal

Filter Wiener : Ilustrasi

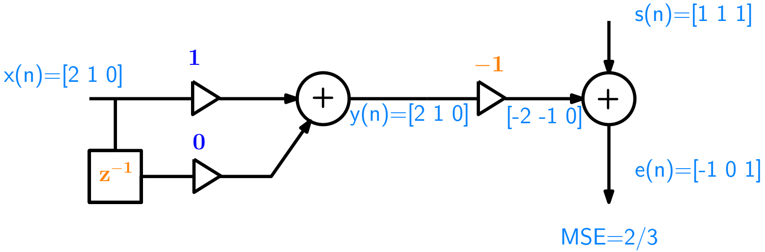
1. Tinjau struktur orde 1 berikut:



2. Misalkan sinyal referensi adalah s(n) = [1 1 1]
3. Misalkan sinyal referensi adalah x(n) = [2 1 0]
4. Misalkan koefisien filter adalah $[b_0\ b_1]$ = [1 0]
5. Dengan situasi ini, maka sinyal keluaran $y(n) = [2\ 1\ 0]$
6. Dengan demikian sinyal error
   $e(n) = s(n) - y(n) = [1\ 1\ 1] - [2\ 1\ 0] = [-1\ 0\ 1]$
7. $MSE = \frac{1}{3}\left[(-1)^2 + 0^2 + 1^2\right] = \frac{2}{3}$

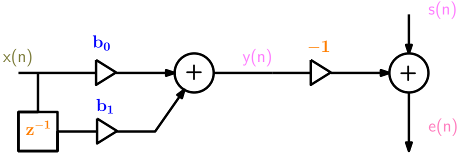
Filter Wiener : Ilustrasi

1. Ilustrasi dari perhitungan filter orde 1 sebelumnya diberikan pada Gambar berikut:



Filter Wiener : Ilustrasi

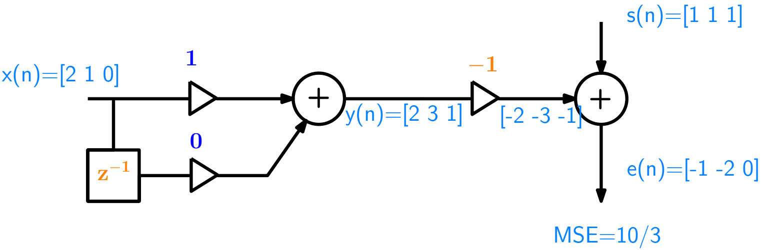
1. Mari perhatian perbandingannya dengan ilustrasi berikut:



2. Misalkan sinyal referensi adalah s(n) = [1 1 1]
3. Misalkan sinyal referensi adalah x(n) = [2 1 0]
4. Misalkan koefisien filter adalah $[b_0\ b_1]$ = [1 1]
5. Dengan situasi ini, maka sinyal keluaran $y(n) = [2\ 3\ 1]$
6. Dengan demikian sinyal error
   $e(n) = s(n) - y(n) = [1\ 1\ 1] - [2\ 3\ 1] = [-1\ \ -3\ 0]$
7. $MSE = \frac{1}{3}\left[(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2\right] = \frac{10}{3}$

Filter Wiener : Ilustrasi

1. Ilustrasi dari perhitungan filter orde 1 sebelumnya diberikan pada Gambar berikut:



Filter Wiener : Ilustrasi

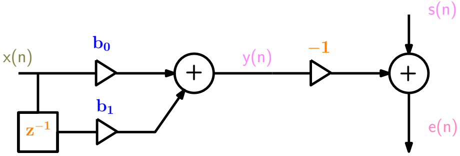
1. Dengan kata lain, untuk x(n) = [2 1 0] dan s(n) = [1 1 1], setting filter $[b_0\ b_1] = [1\ 0]$ lebih baik dari pada setting filter $[b_0\ b_1] = [1\ 1]$
2. karena setting filter $[b_0\ b_1] = [1\ 0]$ memberikan MSE lebih kecil yaitu **2/3** dibandingkan dengan setting filter $[b_0\ b_1] = [1\ 1]$ yaitu **10/3**
3. Pertanyaannya kemudian adalah: adakah setting nilai b_0 dan b_1 yang lebih baik daripada [1 0] untuk memberikan MSE terkecil?
4. **Filter Wiener** didesain untuk menjawab pertanyaan ini.
5. Filter Wiener menggunakan teknik solusi **Least Square**
6. Teknik ini telah digunakan oleh Karl Frederich Gauss ketika berusaha untuk memodelkan orbit planet.

Menghitung koefisien Filter Wiener

Ada beberapa cara untuk menghitung koefisien Filter Wiener. Kita akan menggunakan cara ilustrasi dari orde 1 kemudian digeneralisasi ke orde 2 dan seterusnya.
Cara lain yang dapat dilakukan adalah dengan **differensial** matriks dan vektor.
Kita tempuh cara pertama yaitu mulai dari orde 1 kemudian digeneralisasi ke orde N (teknik induksi)

Menghitung koefisien Filter Wiener orde 1

1. Tinjau struktur filter orde 1 berikut:



2. Misalkan sinyal referensi adalah s(n)
3. Misalkan sinyal referensi adalah x(n)
4. Misalkan koefisien filter adalah $[b_0\ b_1]$
5. Dengan nilai $x(n)$ dan $b(n)$ maka kita bisa hitung keluaran:
6. $y(0) = b_0 x(0)$
7. $y(1) = b_0 x(1) + b_1 x(0)$
8. $y(2) = b_0 x(2) + b_1 x(1)$
9. dst

Menghitung koefisien Filter Wiener orde 1

1. Oleh karena **y(n)** diupayakan sama atau sedekat mungkin dengan **s(n)**
2. maka:
3. $y(0) = b_0 x(0) = s(0)$
4. $y(1) = b_0 x(1) + b_1 x(1) = s(1)$
5. $y(2) = b_0 x(2) + b_1 x(1) = s(2)$
6. dst
7. Jika dituliskan dalam matriks, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x(0) & 0 \\ x(1) & x(0) \\ x(2) & x(1) \\ \vdots & \vdots \\ x(N-1) & x(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(0) \\ a(1) \\ s(2) \\ \vdots \\ s(N) \end{bmatrix}$$

Menghitung koefisien Filter Wiener orde 1

1. Selanjutkan kita kalikan kedua ruas dengan transpose dari **x**:

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & \cdots & x(N-1) \\ x(1) & x(1) & x(2) & \cdots & x(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) & 0 \\ x(1) & x(0) \\ x(2) & x(1) \\ \vdots & \vdots \\ x(N-1) & x(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & \cdots & x(N-1) \\ 0 & x(0) & x(1) & \cdots & x(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ a(1) \\ s(2) \\ \vdots \\ s(N) \end{bmatrix}$$

Menghitung koefisien Filter Wiener orde 1

1. Atau:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(1) & r_{xxm}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xs}(0) \\ r_{xs}(1) \end{bmatrix}$$

2. Persamaan di atas disebut dengan persamaan **Wiener-Hopf**
3. dengan
$r_{xx}(0) = x(0) \cdot x(0) + x(1) \cdot x(1) + \cdots + x(N-1) \cdot x(N-1)$
4. dengan
$r_{xx}(1) = x(0) \cdot x(1) + x(1) \cdot x(2) + \cdots + x(N-2) \cdot x(N-1)$
5. dengan
$r_{xxm}(0) = x(0) \cdot x(0) + x(1) \cdot x(1) + \cdots + x(N-2) \cdot x(N-2)$
6. d $r_{xs}(0) = x(0) \cdot s(0) + x(1) \cdot s(1) + \cdots + x(N-1) \cdot s(N-1)$
7. dan
$r_{xs}(1) = x(0) \cdot s(1) + x(1) \cdot s(2) + \cdots + x(N-2) \cdot s(N-1)$ ds

Menghitung koefisien Filter Wiener orde 1

1. Dengan menyelesaikan persamaan **Wiener-Hopf**, maka diperoleh solusi untuk b_0 dan b_1:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(1) & r_{xxm}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{xs}(0) \\ r_{xs}(1) \end{bmatrix}$$

2. Contoh ilustrasi diberikan pada slide 12.