PERTEMUAN 10
ESTIMASI PARAMETER

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai estimasi parameter dalam statistik inferensial. Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu:

10.1 Menjelaskan estimasi parameter
10.2 Menjelaskan penduga yang baik
10.3 Menghitung pendugaan titik
10.4 Menghitung pendugaan interval
10.5 Menghitung pendugaan parameter populasi dengan sampel besar
10.6 Menghitung pendugaan parameter populasi dengan sampel besar

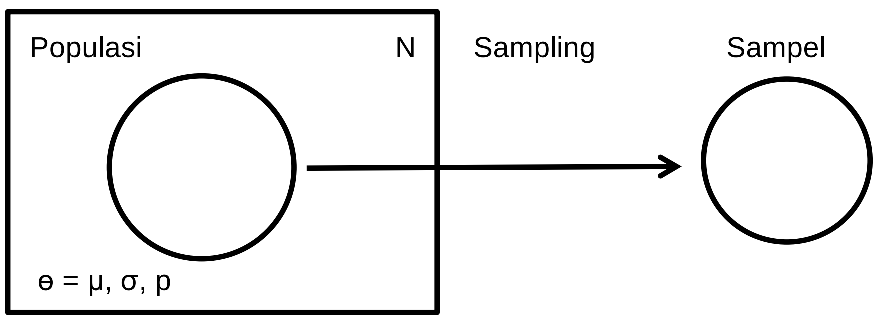
B. URAIAN MATERI

Tujuan Pembelajaran 10.1:

Estimasi Parameter

1. Pendahuluan

Pada bagian sebelumnya telah dibahas mengenai tujuan utama dari penggunaan sampel dari suatu populasi yaitu untuk memperoleh informasi mengenai parameter populasi. Karena seringkali dihadapkan bahwa parameter dari populasi itu sendiri tidak diketahui meskipun distribusi dari populasi tersebut diketahui. Misalkan suatu populasi dinyatakan berdistribusi normal, tetapi parameter rata-rata μ dan simpangan baku σ tidak diketahui, atau misalkan suatu populasi populasi diketahui mempunyai distribusi binomial, tetapi parameter proporsi p tidak diketahui. Oleh karena parameter dari populasi tidak diketahui itulah, maka statistik inferensial dipelajari bagaimana cara mengetahui parameter tersebut. Ada dua cara yang dipelajari dalam statistik inferensial untuk mengetahui parameter populasi, yaitu dengan cara pendugaan (penaksiran) dan dengan cara pengujian hipotesis. Dua cara ini didasarkan pada statistik atau besaran yang dihitung dari sampel sehingga kita harus mengambil sampel dari populasi. Untuk mengenai hal ini, pandanglah hubungan antara populasi dan sampel pada gambar berikut ini.



Gambar 10.1 Hubungan populasi dan sampel

Telah dijelaskan juga bahwa agar kita memperoleh gambaran yang baik dan tepat mengenai parameter populasi, maka sampel yang diambil harus merupakan sampel yang representatif. Pada gambar di atas, parameter populasi ditulis dengan huruf latin θ (dibaca *theta*) dimana θ bisa berupa rata-rata populasi yaitu μ, bisa berupa simpangan baku populasi yaitu σ, dan bisa berupa proporsi populasi yaitu p. Statistik dari sampel ditulis dengan huruf $\hat{\theta}$ (dibaca *theta topi*), dimana $\hat{\theta}$ bisa berupa rata-rata sampel, yaitu $\overline{X}$, bisa berupa simpangan baku yaitu s, dan bisa berupa proporsi sampel, yaitu $\hat{p}$.

Pada statistik inferensial, statistik $\hat{\theta}$ inilah yang dipakai untuk menduga parameter θ dari populasi, tepatnya adalah sebagai berikut:

Statistik $\hat{\theta} = \overline{X}$ dipakai untuk menduga parameter $\theta = \mu$

Statistik $\hat{\theta} = s$ dipakai untuk menduga parameter $\theta = \sigma$

Statistik $\hat{\theta} = \hat{p}$ dipakai untuk menduga parameter $\theta = p$

Pada hubungan ini menjelaskan bahwa statistik $\hat{\theta}$ berperan sebagai penduga, sedangkan parameter θ berkedudukan sebagai sesuatu yang diduga. Statistik $\hat{\theta}$ baru bisa dihitung setelah kita mengambil sampel secara berulang dari populasi. Oleh karena itu, kiranya dapat dipahami juga bahwa parameter dari suatu populasi bersifat teoritis atau abstrak karena sering tidak diketahui dan sulit disentuh, sedangkan statistik dari sampel bersifat empiris atau nyata karena dapat dihitung dari sampel. Oleh karena itu, seringkali populasi disebut sebagai model teoritis, sedangkan sampel disebut model empiris.

Tujuan Pembelajaran 10.2:

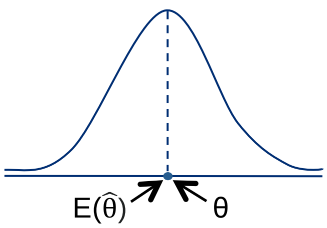
Penduga Yang Baik

Oleh karena tujuannya adalah untuk memperoleh gambaran yang baik mengenai populasi, maka statistik $\hat{\theta}$ yang dipakai untuk menduga parameter θ haruslah merupakan penduga yang baik, yaitu penduga yang mempunyai tiga ciri sebagai berikut.

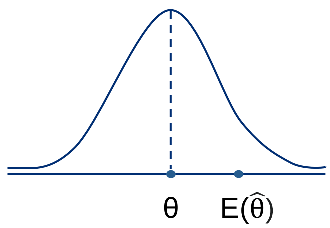
1. $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias dari θ, yaitu $E(\hat{\theta}) = \theta$, artinya harapan penduga $\hat{\theta}$ sama dengan θ;
2. $\hat{\theta}$ merupakan penduga yang efisien, artinya bila ada lebih dari satu penduga, maka penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai variansi paling kecil.
3. $\hat{\theta}$ merupakan penduga yang konsisten, artinya bila sampel yang diambil semakin besar, maka nilai $\hat{\theta}$ akan semakin mendekati nilai θ.

Sebagai gambaran, pandanglah gambar berikut ini yang berkaitan dengan tiga ciri penduga yang baik tersebut.

1. Penduga Tak Bias



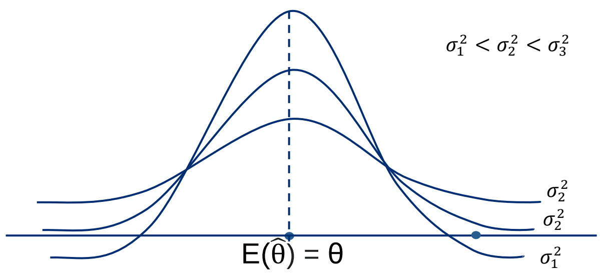
Gambar 10.2 Penduga tak bias, $E(\hat{\theta}) = \theta$



Gambar 10.3 Penduga bias

Penduga tak bias artinya penduga yang dengan tepat mengenai sasaran, seperti ditunjukkan oleh gambar 10.2. Sedangkan penduga bias artinya penduga yang tidak tepat mengenai sasaran atau disebut meleset, seperti ditunjukkan oleh gambar 10.3.

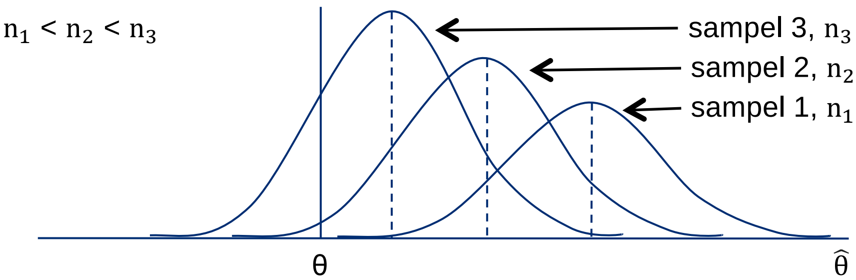
2. Penduga yang Efisien



Gambar 10.4 Penduga efisien

Pada gambar di atas menunjukkan tiga penduga yaitu $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, dan $\hat{\theta}_3$ yang diperoleh dari tiga sampel, dimana distribusi sampel 1 mempunyai variansi σ_1^2, sampel 2 mempunyai variansi σ_2^2, dan sampel 3 mempunyai variansi σ_3^2. Oleh karena sampel 1 mempunyai variansi paling kecil, maka dikatakan $\hat{\theta}_1$ merupakan penduga yang efisien.

3. Penduga yang Konsisten



Gambar 10.5 Penduga kosisten

Pada gambar di atas, ditunjukkan bahwa ukuran sampel 1 yaitu n_1, lebih kecil daripada ukuran sampel 2 yaitu n_2 dan lebih kecil dari ukuran sampel 3 yaitu n_3. Pada gambar terlihat bahwa makin besar ukuran sampel statistik maka penduga $\hat{\theta}$ makin mendekati parameter θ dari populasi, dimana distribusi sampel konsisten bergerak ke kiri.

Contoh 10.1

1. Nilai rata-rata $\overline{X}$ dari sampel berukuran n yang diambil secara acak dari populasi dengan rata-rata μ merupakan penduga tak bias karena $E(\overline{X}) = \mu$.
2. Variansi S^2 dari sampel berukuran n yang diambil secara acak dari populasi dengan variansi σ^2 merupakan penduga tak bias karena $E(S^2) = \sigma^2$. Hal ini artinya statistik $\hat{\theta} = S^2$ dan parameter $\theta = \sigma^2$.
3. Nilai rata-rata $\mu_{\overline{X}}$ dari sampel rata-rata yang diambil secara berurutan dari suatu populasi dengan rata-rata μ merupakan penaksir tak bias karena $E(\mu_{\overline{X}}) = \mu$.

Tujuan Pembelajaran 10.3:

Pendugaan Titik

Kita mengenal dua jenis pendugaan, yaitu pendugaan titik dan pendugaan interval. Bila nilai parameter θ dari populasi hanya diduga dengan memakai satu nilai statistik $\hat{\theta}$ dari sampel yang diambil dari populasi tersebut, maka statistik $\hat{\theta}$ disebut pendugaan titik.

Contoh 10.2

Kita ingin menduga berapa sesungguhnya rata-rata tinggi badan orang di Tangerang Selatan. Untuk keperluan ini, kita ambil suatu sampel acak sebanyak 1.000 orang dan kita ukur tinggi badannya masing-masing. Misalkan diperoleh rata-rata tinggi badan adalah $\overline{X}$ = 164 cm. Nilai rata-rata ini dipakai untuk menduga rata-rata tinggi badan yang sesungguhnya orang di Tangerang Selatan. Oleh karena itu kita hanya memakai satu nilai saja, yaitu $\overline{X}$ = 164 cm sebagai penduga, maka nilai $\overline{X}$ = 164 cm ini disebut penduga titik.

Secara umum statistik berikut ini merupakan penduga titik dari parameter populasi.

1. $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$ adalah penduga titik untuk μ.
2. $S^2 = \frac{\sum(X-\overline{X})^2}{n}$ adalah penduga titik untuk σ^2.
3. Proporsi $\hat{p} = \frac{X}{n}$ adalah penduga titik untuk $p = \frac{X}{N}$.

Pada pendugaan titik, semakin dekat nilai $\hat{\theta}$ (penduga) dengan nilai θ (yang diduga), maka penduga $\hat{\theta}$ akan semakin baik. Dengan demikian, dalam pendugaan titik ini, kita harus berhasil memperoleh satu nilai penduga $\hat{\theta}$ yang benar-benar mendekati nilai parameter θ dari populasi. Tuntutan ini terlalu kuat dan sulit dilakukan karena nilai statistik $\hat{\theta}$ yang kita peroleh sangat bergantung pada sampel yang diambil dari populasinya yang cenderung akan menghasilkan nilai statistik yang berbeda-beda untuk sampel yang berbeda-beda.

Misalkan pada contoh 10.2 bila diambil sampel yang lain bisa jadi akan diperoleh rata-rata tinggi badan adalah $\overline{X}$ = 163 cm sehingga ada dua nilai penduga, yaitu $\hat{\theta}$ = 164 cm dan $\hat{\theta}$ = 163 cm? Sehingga dengan demikian tidak ada yang menjamin bahwa statistik $\hat{\theta}$ akan secara pasti dapat menduga parameter θ. Ada suatu keraguan dan kepercayaan yang bias yang kita peroleh dari pendugaan titik ini, karena kita tidak dapat menentukan derajat keyakinan atau derajat kepercayaan dari statistik $\hat{\theta}$ yang kita peroleh dari sampel. Oleh karena itu, pendugaan titik dikatakan memiliki kelemahan dan sulit dipertanggungjawabkan secara statistik, karena tidak dapat ditentukan derajat keyakinannya atau derajat kepercayaannya, sehingga dalam praktek pendugaan ini jarang digunakan dan kurang menarik perhatian bagi para statistikawan.

Tujuan Pembelajaran 10.4:

Pendugaan Interval

Pendugaan interval di sini artinya melakukan estimasi nilai parameter populasi yang dinyatakan di dalam interval. Apabila nilai parameter θ dari populasi diduga dengan memakai beberapa nilai statistik $\widehat{\theta}$ yang berada dalam suatu interval, katakanlah interval $\widehat{\theta} < \theta < \widehat{\theta}$, maka statistik $\widehat{\theta}$ disebut penduga interval.

Pendugaan interval dibandingkan dengan pendugaan titik jelaslah sangat berbeda. Pendugaan titik hanya memakai satu nilai $\widehat{\theta}$, sedangkan pendugaan interval menggunakan lebih dari satu nilai $\widehat{\theta}$. Interval tersebut dinyatakan berada dalam suatu batas bawah dan batas atas tertentu.

Pada contoh 10.2, rata-rata tinggi badan orang Tangerang Selatan dapat kita duga dengan memakai interval $160 < \theta < 166$, artinya rata-rata tinggi badan orang di Tangerang Selatan diduga berada pada atau terletak pada interval tersebut. Kita juga dapat menduga dengan memakai interval $155 < \theta < 169$, artinya rata-rata tinggi orang di Tangerang Selatan diduga berada di dalam interval tersebut. Makin lebar intervalnya, maka makin besar kepercayaan atau keyakinan kita bahwa rata-rata tinggi badan orang di Tangerang Selatan yang kita duga itu akan terletak atau berada di dalam interval tersebut. Artinya kita lebih percaya terhadap interval $155 < \theta < 169$, daripada interval $160 < \theta < 166$. Dengan demikian dalam pendugaan interval, makin lebar interval maka kita semakin yakin dan percaya akan kebenaran dan ketepatan mengenai pendugaan yang dilakukan. Pada praktek, kita harus memakai suatu interval yang sempit, tetapi mempunyai tingkat kepercayaan atau derajat keyakinan yang dapat diterima.

Derajat kepercayaan penduga $\widehat{\theta}$ disebut dengan tingkat kepercayaan, yang dilambangkan dengan α dimana nilainya di dalam $0 < \alpha < 1$ dan dinyatakan dalam bentuk probabilitas. Secara umum pendugaan interval dinyatakan dalam bentuk $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$. Dengan demikian, misalnya pendugaan interval untuk parameter rata-rata populasi (μ) mempunyai bentuk $\overline{X} - k < \mu < \overline{X} + k$. Sedangkan pendugaan interval untuk parameter proporsi (p) mempunyai bentuk $\hat{p} - k < p < \hat{p} + k$.

Pengambilan sampel secara acak kita dapat menentukan nilai $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ sehingga diperoleh interval $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$. Derajat kepercayaan atau derajat keyakinan terhadap interval $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ dinyatakan dalam bentuk probabilitas, yaitu:

$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2)$ = nilai tertentu

Misalkan $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 0{,}95$, artinya dengan probabilitas 0,95 bahwa sampel acak yang kita ambil menghasilkan suatu interval $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ yang mengandung parameter θ dari populasi. $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 0{,}99$, artinya dengan probabilitas 0,99 bahwa sampel acak yang kita ambil akan menghasilkan suatu interval yang mengandung parameter θ yang kita duga.

Pada contoh 10.2, misalnya rata-rata tinggi badan orang di Tangerang Selatan diduga berada pada interval 160 < θ < 166 dengan probabilitas 0,95 maka kita tuliskan P(160 < θ < 166) = 0,95. Bila rata-rata orang di Tangerang Selatan berada pada interval 155 < θ < 169 dengan probabilitas 0,99 maka kita tuliskan P(155 < θ < 169) = 0,99.

Pada statistika, biasanya yang dipilih adalah interval yang lebih pendek, tetapi dengan probabilitas yang tinggi atau dengan derajat kepercayaan yang tinggi. Pada kasus pendugaan rata-rata tinggi badan orang di Tangerang Selatan tersebut, lebih baik kita pilih interval 160 < θ < 166 dengan probabilitas 0,95 daripada interval 155 < θ < 169 dengan probabilitas 0,99. Dengan demikian kita lebih baik memilih P(160 < θ < 166) = 0,95 daripada P(155 < θ < 169) = 0,99. Meskipun kadang karena adanya keterbatasan dalam ukuran sampel, pemilihan interval $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ harus dengan mengorbankan derajat kepercayaan, karena interval yang sempit dengan probabilitas yang tinggi sulit dicapai sekaligus.

Secara umum, dengan mengambil sampel acak secara berulang, maka kita akan memperoleh distribusi statistik θ sehingga probabilitas dari interval $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ akan sama dengan nilai tertentu yang diinginkan yaitu:

Rumus 10.1

$$\boxed{P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha,\ 0 < \alpha < 1}$$

dimana:
α disebut derajat kesalahan
1 – α disebut derajat kepercayaan
$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2)$ disebut interval kepercayaan

Berdasarkan rumus 10.1, apabila sampel telah diambil maka dapat menghitung nilai $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ sehingga merupakan nilai yang tetap (tertentu). Misalnya pada contoh tadi bahwa P(160 < θ < 166) = 0,95 maka ungkapan yang tepat sekarang ini adalah bahwa “kita percaya 95% bahwa parameter populasi θ akan terletak antara 160 sampai dengan 166 berdasarkan sampel yang diambil dari populasi tersebut. Jadi bukan diungkapkan dengan probabilitas sama dengan 0,95 bahwa parameter populasi θ terletak antara 160 sampai dengan 166 berdasarkan sampel yang diambil dari populasi itu.

Dengan memakai cara pedugaan interval seperti rumus 10.1 selanjutnya kita akan melakukan pendugaan untuk parameter rata-rata (μ), parameter proporsi (p), parameter beda dua rata-rata (μ_1 - μ_2), dan parameter beda dua proporsi ($p_1 - p_2$) dengan memakai sampel besar dan sampel kecil.

Tujuan Pembelajaran 10.5:

Pendugaan Parameter Populasi dengan Sampel Besar

Bila suatu populasi diambil sampel acak yang besar, maka statistik $\hat{\theta}$ akan mempunyai distribusi normal, sehingga dapat ditransformasi menjadi distribusi normal standar. Dengan demikian, penentuan interval kepercayaan parameter memakai suatu nilai $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ yang diperoleh dari tabel distribusi kumulatif normal standar. Untuk beberapa derajat kepercayaan atau tingkat kepercayaan, nilai $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dapat dilihat dari tabel berikut ini.

Tabel 10.1 Distribusi kumulatif normal standar

Derajat kepercayaan	99,73%	99%	98%	96%	95,45%	95%	90%	80%	68,2%	50%
$Z_{\frac{\alpha}{2}}$	3,0	2,8	2,33	2,05	2,00	1,96	1,645	1,28	1,00	0,6745

1. Pendugaan Parameter μ

Misalkan diberikan populasi terbatas atau tak terbatas dimana simpangan baku σ diketahui. Kita tahu bahwa rata-rata $\overline{X}$ adalah penduga yang tak bias untuk μ. Bila diambil sampel berukuran cukup besar secara berulang, maka distribusi sampel rata-rata $\overline{X}$ akan mempunyai simpangan baku $\sigma_{\overline{X}}$, dengan ketentuan sebagai berikut.

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, bila populasi tak terbatas

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, bila populasi terbatas

Sehingga dengan demikian interval kepercayaan untuk pendugaan parameter μ bila σ diketahui adalah

Rumus 10.2

$$P(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

Dimana:

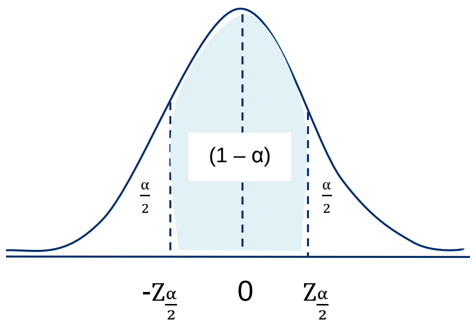
$\overline{X}$ = rata-rata distribusi sampel rata-rata

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = nilai dari tabel distribusi normal kumulatif

$\sigma_{\overline{X}}$ = simpangan baku distribusi sampel rata-rata

α = tingkat kesalahan

Gambar untuk interval kepercayaan (1 – α) tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 10.6 Interval kepercayaan (1 – α)

Contoh 10.3.

Dari populasi para pegawai suatu perusahaan diambil sampel sebanyak 100 orang dan dicatat gaji tahunan masing-masing. Rata-rata dan simpangan baku gaji mereka itu adalah:

$\overline{X}$ = Rp 300.000.000

S = Rp 6.000.000

Buatlah selang kepercayaan 95% untuk menduga berapa sesungguhnya rata-rata gaji para pegawai di perusahaan tersebut !

Jawab:

Populasi dianggap tak terbatas sebab ukurannya tidak diketahui.

Diketahui Sampel:

n = 100

$\overline{X}$ = Rp 300.000.000

S = Rp 6.000.000

Ukuran sampel n cukup besar. Karena σ tidak diketahui, maka harus ditaksir dengan S, yaitu:

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{6.000.000}{\sqrt{100}}$ = 600.000

Untuk interval kepercayan 95%, diperoleh $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,96

Maka:

$\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}$ = 30.000.000 – (1,96) x (600.000) = 28.824.000

$\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}$ = 30.000.000 + (1,96) x (600.000) = 31.176.000

Jadi, interval kepercayaan 95% untuk rata-rata (μ) gaji tahunan yang sesungguhnya dari para pegawai di perusahaan tersebut adalah P(28.824.000 < μ < 31.176.000)

Artinya kita percaya 95% bahwa rata-rata (μ) gaji tahunan yang sesungguhnya dari para pegawai di perusahaan itu berkisar antara Rp 28.824.000 sampai dengan 31.176.000 setahun.

Bila $\overline{X}$ merupakan penduga untuk μ, maka dapat dipercayakan (1 – α) x 100% bahwa kesalahan akan lebih dari suatu besaran tertentu e yang ditetapkan sebelumnya dengan syarat, yaitu:

Rumus 10.3

$$\boxed{n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{e}\right)^2}$$

Tampak bahwa rumus di atas sesungguhnya mempunyai syarat bahwa simpangan baku σ dari populasi harus diketahui. Akan tetapi, bila σ tidak diketahui dan sampel cukup besar (n ≥ 30), maka σ dapat ditaksir dengan simpangan baku S yang dihitung dari sampel.

Contoh 10.4.

Rata-rata dan simpangan baku nilai statistika dari sampel acak berukuran n = 36 mahasiswa masing-masing adalah 2,6 dan 0,3. Bila ingin dibuat selang kepercayaan 95% dan pendugaan untuk μ meleset kurang dari 0,05. Berapakah besar sampel yang diperlukan.

Jawab:

Karena ukuran sampel adalah n = 36 cukup besar dan σ tidak diketahui, maka σ kita taksir dengan S = 0,3. Banyaknya sampel yang diperlukan adalah:

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma}{e}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{(1{,}96) \text{ x } (0{,}3)}{0{,}05}\right)^2$$

n = 138,3 ≈ 138 mahasiswa

2. Pendugaan Parameter Proporsi (p)

Bila suatu populasi berukuran N mengandung jenis tertentu dengan proporsi p = $\frac{X}{N}$ dan pada populasi itu diambil secara berulang sampel berukuran n yang mengandung jenis tertentu dengan proporsi $\hat{p}$ = $\frac{X}{n}$, maka distribusi sampel proporsi $\hat{p}$ akan mampunyai rata-rata $\mu_{\hat{p}}$ = p dan simpangan baku:

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, bila populasi tak terbatas

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, bila populasi terbatas

Dengan demikian interval kepercayaan untuk penduga p adalah:

Rumus 10.4

$$P(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\hat{p}} < \mu < \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\hat{p}}) = 1 - \alpha$$

Oleh karena proporsi p pada populasi tidak diketahui dan akan diduga dengan proporsi $\hat{p}$ pada sampel, maka simpangan baku $\sigma_{\hat{p}}$ pada rumus di atas dapat diganti dengan:

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, bila populasi tak terbatas

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, bila populasi terbatas

Contoh 10.5.

Pada suatu sampel acak berukuran n = 500 orang di suatu kota ditemukan bahwa 340 orang diantaranya suka nonton TV acara berita selebriti. Tentukan interval kepercayaan 95% untuk menduga berapa proporsi sesungguhnya penduduk di kota itu yang suka nonton TV untuk acara berita selebriti !

Jawab:

$\hat{p}$ = proporsi orang yang nonton TV acara dunia selebriti

$\hat{p} = \frac{340}{500}$ = 0,68

Simpangan baku sampel proporsi $\hat{p}$ adalah:

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{(0{,}68) \text{x} (0{,}32)}{500}}$ = 0,002

Pada pembahasan hal ini, jumlah populasi penduduk di kota itu yang suka nonton berita selebriti dianggap tidak terbatas, sebab jumlahnya tidak diketahui, sehingga diperoleh:

$\hat{p}$ - $Z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\sigma_{\hat{p}}$ = 0,68 – (1,96) x (0,02) = 0,641

$\hat{p}$ + $Z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\sigma_{\hat{p}}$ = 0,68 + (1,96) x (0,02) = 0,719

Jadi interval kepercayaan 95% untuk penduga p adalah:

P(0,641 < p < 0,719) = 0,95

Artinya kita percaya 95% bahwa proporsi penduduk di kota itu yang sesungguhnya suka nonton TV untuk acara berita selebriti adalah antara 64,1% sampai dengan 71,9%.

3. **Pendugaan Parameter Beda Dua Rata-Rata (μ_1 - μ_2)**

Misalkan kita mempunyai dua populasi, pada populasi pertama mempunyai rata-rata μ_1 dan simpangan baku σ_1; sedangkan populasi kedua mempunyai rata-rata μ_2 dan simpangan baku σ_2. Dari populasi pertama kita ambil sampel acak sebanyak n_1 dan dari populasi kedua kita ambil sampel acak sebanyak n_2. Selanjutnya kita hitung rata-rata $\overline{X}_1$ untuk sampel pertama dan rata – rata $\overline{X}_2$ untuk sampel kedua. Misalkan dua sampel itu saling bebas. Bila kedua sampel acak itu diambil secara berulang, maka kita akan memperoleh distribusi sampel beda dua rata-rata $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ dengan rata-rata (μ_1 - μ_2) dan simpangan baku $\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Dengan demikian, interval kepercayaan untuk pendugaan beda dua rata-rata (μ_1 - μ_2), bilamana σ_1 dan σ_2 diketahui adalah:

Rumus 10.5

$$P\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < \mu1 - \mu2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}\right] = 1 - \alpha$$

di mana:

$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$, bila populasi tak terbatas

$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} . \sqrt{\frac{(N_1+N_2)-(n_1+n_2)}{(N_1+N_2)-1}}$, bila populasi terbatas

Bila σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui dan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, maka simpangan baku distribusi sampel beda dua rata-rata menjadi:

$$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{2}{n_2}}$$

Bila σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dengan $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, maka σ_1^2 ditaksir dengan S_1^2 dan σ_2^2 ditaksir dengan S_2^2, sehingga simpangan baku sampel beda dua rata-rata menjadi:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

Contoh 10.6.

Ujian Akuntansi diberikan kepada dua kelompok mahasiswa, yaitu mahasiswa perempuan sebanyak 75 orang dan mahasiswa laki-laki sebanyak 50 orang. Kelompok mahasiswa perempuan memperoleh nilai rata-rata 82 dengan simpangan baku 8, sedangkan kelompok mahasiswa laki-laki memperoleh nilai rata-rata 76 dengan simpangan baku 6. Bila μ_1 menyatakan rata-rata nilai ujian kelompok mahasiswa perempuan, sedangkan μ_2 menyatakan rata-rata nilai ujian kelompok mahasiswa laki-laki. Buatlah interval kepercayaan 96% untuk menduga berapa sesungguhnya beda rata-rata dua kelompok mahasiswa tersebut !

Jawab:

Dua populasi dianggap tidak terbatas.

Kelompok mahasiswa perempuan:

$n_1 = 75$

$\bar{X}_1 = 82$

$S_1 = 8$

Kelompok mahasiswa laki-laki:

$n_2 = 50$

$\bar{X}_2 = 76$

$S_2 = 6$

Dalam hal ini simpangan baku dua populasi mahasiswa itu tidak diketahui, maka simpangan baku sampel dua rata-rata tersebut adalah:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(8)^2}{75}+\frac{(6)^2}{50}} = 1{,}254$$

Penduga untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$.

Untuk interval kepercayaan 96%, maka $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}05$, sehingga diperoleh:

$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = (82 - 76) - (2{,}05) \times (1{,}254) = 3{,}429$

$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = (82 - 76) + (2{,}05) \times (1{,}254) = 8{,}571$

Jadi, interval kepercayaan 96% untuk menduga $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah:

$P(3{,}429 < \mu_1 - \mu_2 < 8{,}571) = 0{,}96$

Artinya 96% dapat dipercaya bahwa beda sesungguhnya nilai rata-rata ujian akuntansi dua kelompok mahasiswa itu terletak antara 3,429 sampai dengan 8,571.

4. Pendugaan Parameter Beda Dua Proporsi ($p_1 - p_2$)

Misalkan kita mempunyai dua populasi. Populasi pertama mengandung jenis tertentu dengan $p_1 = \frac{X_1}{N_1}$ dan populasi kedua mengandung jenis tertentu dengan $p_1 = \frac{X_2}{N_2}$. Bila pada dua populasi diambil sampel acak masing-masing n_1 dan n_2, maka sampel pertama akan mengandung jenis tertentu dengan proporsi $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ dan sampel kedua akan mengandung jenis tertentu dengan proporsi $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$. Bila sampel diambil secara berulang dan saling bebas, maka akan diperoleh distribusi sampel beda proporsi ($\hat{p}_1$ - $\hat{p}_2$).

Sehingga dengan demikian interval kepercayaan untuk penduga beda dua proporsi ($p_1 - p_2$) adalah:

Rumus 10.6

$$P\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}\right] = 1 - \alpha$$

di mana:

$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$, bila populasi tak terbatas

$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \cdot \sqrt{\frac{(N_1+N_2)-(n_1+n_2)}{(N_1-N_2)-1}}$, bila populasi terbatas

Contoh 10.7.

Survei diadakan terhadap pengunjung Pameran di Pamulang Square yang terletak di Tangerang Selatan. Untuk itu diambil dua kelompok sampel. Sampel pertama adalah ibu-ibu sebanyak 500 orang dan ketika mereka ditanya sebanyak 325 orang mengatakan puas dengan pameran ditanya sebanyak 325 orang mengatakan puas dengan pameran di Pamulang Square, sedangkan sampel kedua terdiri dari pengunjung bapak-bapak sebanyak 700 orang dan 400 diantaranya menyatakan puas dengan pameran di Pamulang Square. Buatlah interval kepercayaan 95% untuk menduga berapa sesungguhnya beda dua populasi pengunjung yang puas dengan pameran di Pamulang Square !

Jawab:

Kelompok ibu-ibu:

$\hat{p}_1$ = proporsi puas dengan pameran = $\frac{325}{500}$ = 0,65

Kelompok bapak-bapak:

$\hat{p}_2$ = proporsi puas dengan pameran = $\frac{400}{700}$ = 0,57

Dua populasi pengunjung dianggap tidak terbatas.

Maka diperoleh:

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0{,}65)(0{,}35)}{500} + \frac{(0{,}57)(0{,}43)}{700}}$$

= 0,03

untuk interval kepercayaan 95%, maka $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,96, sehingga:

$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ = (0,65 - 0,57) – (1,96) x (0,03) = 0,02

$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ = (0,65 - 0,57) + (1,96) x (0,03) = 0,14

Sehingga, interval untuk beda proporsi sesungguhnya yang puas dengan pameran di Pamulang Square dari dua kelompok pengunjung tersebut adalah P(0,02 < $p_1 - p_2$ < 0,14) = 0,95. Artinya kita dapat percaya 95% bahwa beda proporsi sesungguhnya pengunjung yang puas dengan pameran di Pamulang Square adalah antara 2% sampai dengan 14%.

Tujuan Pembelajaran 10.6:

Pendugaan Parameter Populasi dengan Sampel Kecil

Semua rumus pendugaan parameter populasi yang telah dibahas tersebut hanya berlaku untuk sampel acak berukuran besar, yaitu n ≥ 30. Pendugaan itu berlaku untuk populasi berdistribusi normal maupun tidak normal. Jarang sekali variansi σ^2 dari suatu populasi diketahui. Akan tetapi, bila sampel yang diambil bersifat acak dan berukuran besar maka σ^2 dapat ditaksir dengan variansi yang dihitung dari sampel, yaitu:

$$S^2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n-1}$$

Dengan sampel yang besar, maka fluktuasi S^2 tidak akan terlalu besar, artinya nilai-nilai S^2 tidak akan terlalu berbeda antara sampel yang satu dengan sampel yang lain. Sehingga variansi σ^2 dapat didekati dengan variansi sampel yaitu S^2, karena S^2 merupakan penduga yang baik untuk σ^2. Dalam hal ini, apapun distribusi populasinya, normal atau tidak normal, maka statistik:

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$, dimana $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$ akan tetap mendekati distribusi normal.

Bila sampel yang diambil ukurannya kecil yaitu n < 30, maka variansi S^2 tidak lagi stabil, melainkan berfluktuasi cukup besar, atau perbedaannya cukup besar antara sampel yang satu dengan sampel yang lain sehingga statistik berikut ini.

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$, dimana $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$

Tidak lagi berdistribusi normal dan juga tidak mendekati distribusi normal. Dalam hal sampel yang kita ambil jumlahnya kecil, ternyata distribusi dari statistik tersebut merupakan distribusi student yang ditulis t, yaitu:

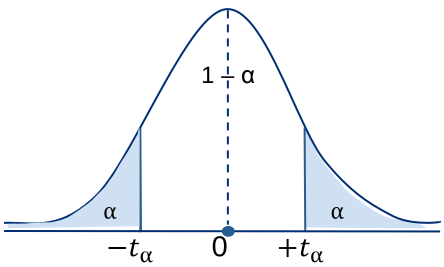
Rumus 10.7

$$\boxed{t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \text{ , dimana } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}}$$

Rumus distribusi t tersebut ditemukan oleh W.S. Gosset yang kemudian memakai nama samara distribusi student t untuk mempublikasikan rumus yang ditemukannya tersebut. Asumsi yang dipakai dalam merumuskan distribusi student t adalah bahwa sampel acak diambil dari suatu populasi berdistribusi normal. Meskipun ada asumsi seperti itu, pengalaman menunjukkan bahwa walaupun sampel acak diambil dari sutu populasi berdistribusi tidak normal, tetapi bila kurva distribusinya berbentuk lonceng, maka ternyata distribusi statistik tersebut masih mendekati distribusi student t.

Distribusi t sangat mirip dengan distribusi normal standar z, yaitu sama-sama simetri terhadap rata-rata μ = 0. Keduanya berbentuk lonceng, tetapi distribusi t lebih bervariasi karena t bergantung pada dua besaran yang berubah-ubah yaitu $\overline{X}$ dan S^2, sedangkan distribusi normal standar hanya bergantung pada perubahan nilai $\overline{X}$ dari suatu sampel ke sampel lain. Bila sampel yang diambil sangat besar ($x \rightarrow \infty$) maka kedua distribusi itu akaan menjadi sama. Pembagi yang muncul pada rumus variansi S^2, yaitu n – 1 disebut derajat kebebasan yang ditulis $\vartheta = n - 1$.

Sekali lagi perlu ditegaskan bahwa pada umumnya variansi σ^2 dari populasi tidak diketahui sehingga dalam penghitungan distribusi t nilai σ^2 diganti dengan taksiran S^2 yang dihitung dari sampel. Probabilitas t yang terletak antara dua nilai tertentu sama dengan luas di bawah kurva distribusi t dan dibatasi oleh dua nilai absis yang berpadanan dengan nilai tertentu tersebut. Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 10.7 Sifat simetri distribusi t

Perhitungan distribusi t dilakukan dengan memakai tabel distribusi t. Pada tabel telah tercantum nilai-nilai t untuk derajat kebebasan ϑ dan probabilitas atau luas daerah sebesar α yaitu α = 0,25; 0,2; 0,15 dan lainnya, kemudian derajat kebebasan ϑ = 1, 2, 3, dan seterusnya.

Contoh Soal 10.8

1. Untuk sampel berukuran n = 4, maka derajat kebebasan $\vartheta = n - 1 = 3$. Bila luas daerah α = 0,025. Maka kita peroleh nilai t untuk ϑ = 3 dan α = 0,025 yaitu $t_{(\alpha,\vartheta)} = t_{(0,025;\,3)} = 3,182$. Karena distribusi t simetri, maka probabilitas $P(-3,182 < t < 3,182) = 0,95$.
2. Bila n = 10 dan α = 0,05. Tentukanlah $P(t < t_\alpha)$ dan $P(-t_\alpha < t < t_\alpha)$!
   Jawab:
   Karena n = 10 maka ϑ = 9 dan α = 0,05.
   Sehingga $t_{(\alpha,\vartheta)} = t_{(0,05;\,9)} = 1,833$
   Jadi, $P(t < 1,833) = 0,95$ dan $P(-1,833 < t < 1,833) = 0,90$

1. Pendugaan Parameter μ dengan Sampel Kecil

Cara merumuskan interval kepercayaan (1 – α) x 100% dari pendugaan parameter μ dengan sampel kecil sama seperti memutuskan interval kepercayaan dari pendugaan parameter μ dengan sampel besar.

Faktor $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ pada interval kepercayaan untuk pendugaan parameter dengan sampel besar diganti dengan faktor $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}$ pada interval kepercayaan, untuk pendugaan parameter dengan sampel kecil. Demikian juga untuk merumuskan interval kepercayaan, untuk pendugaan parameter populasi p, untuk menduga parameter beda dua rata-rata (μ_1 - μ_2), dan untuk pendugaan parameter beda dua proporsi (p_1 - p_2),

Dengan demikian interval kepercayaan untuk pendugaan parameter μ dengan sampel kecil (n < 30) yang diambil dari suatu populasi dimana variansi σ^2 dari populasi itu tidak diketahui:

Rumus 10.8

$$P\left\{\bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\,\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\,\sigma_{\bar{X}}\right\} = 1 - \alpha$$

dimana:

nilai $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}$ diperoleh dari tabel distribusi t

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$, bilamana populasi tidak terbatas

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, bilamana populasi terbatas

Contoh Soal 10.9.

Suatu sampel acak sebanyak 15 mahasiswa diambil dari populasi mahasiswa di suatu universitas. Ke-15 mahasiswa diberikan ujian mata kuliah statistik dan diperoleh rata-rata yaitu 75 dan simpangan baku 8. Buatlah interval kepercayaan 95% untuk menduga kemampuan statistik semua mahasiswa di universitas tersebut!

Jawab:

Populasi dianggap tak terbatas dan berdistribusi normal dengan simpangan baku σ yang tidak diketahui.

Sampel acak n = 15, $\bar{X}$ = 75, dan S = 8

Simpangan baku distribusi sampel rata-rata adalah:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{15}} = 2{,}07$

Interval kepercayaan yang akan dibuat besarnya 95%, maka α = 5%. Sehingga $\frac{\alpha}{2}$ = 2,5% = 0,025. Sedangkan derajat kebebasan distribusi t adalah ϑ = n – 1 = 15 – 1 = 14. Maka dari tabel distribusi t untuk $\frac{\alpha}{2}$ = 0,025 dan derajat kebebasan ϑ = 14 diperoleh $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)} = t_{(0{,}025,14)}$ = 2,145.

Dengan demikian:

$\bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\,\sigma_{\bar{X}}$ = 75 – (2,145) x (2,07) = 70,6

$\bar{X} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\,\sigma_{\bar{X}}$ = 75 + (2,145) x (2,07) = 79,4

Jadi interval kepercayaan 95% untuk pendugaan kemampuan rata-rata statistik mahasiswa di universitas tersebut adalah P(70,6 < μ < 79,4) = 0,95.

Artinya kita percaya 95% bahwa kemampuan rata-rata statistik semua mahasiswa di universitas itu terletak antara 70,6 sampai dengan 79,4.

2. **Pendugaan Parameter Beda Dua Rata-Rata (μ_1 - μ_2) dengan Sampel Kecil**

Misalkan diketahui dua populasi masing-masing mempunyai rata-rata μ_1 dan μ_2 dan distribusinya mendekati normal. Misalkan variansi dua populasi itu sama yaitu σ_1^2 = σ_2^2 = σ^2, tetapi tidak diketahui berapa besarnya. Kita ambil sampel acak berukuran n_1 dari populasi pertama kemudian dihitung rata-ratanya yaitu $\overline{X}_1$ dan variansinya S_1^2. Begitu juga kita ambil sampel acak berukuran n_2 dari populasi kedua kemudian dihitung rata-ratanya yaitu $\overline{X}_2$ dan variansinya S_2^2. Andaikan sampel pertama dan kedua saling bebas, maka interval kepercayaan untuk pendugaan parameter beda dua rata-rata (μ_1 - μ_2) dari dua populasi itu adalah:

Rumus 10.9

$$P\left\{(\overline{X}_1 - \overline{X}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\, \sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2} < \mu < (\overline{X}_1 - \overline{X}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\, \sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2}\right\} = 1 - \alpha$$

dimana:

$$\sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ disebut simpangan baku gabungan

derajat kebebasan $\vartheta = n_1 + n_2 - 2$

Akan tetapi bila variansi dua populasi itu tidak sama besarnya, yaitu $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ dan kedua variansi tidak diketahui nilainya, maka interval kepercayaan untuk pendugaan parameter beda dua rata-rata (μ_1 - μ_2) dari dua populasi itu berubah menjadi:

Rumus 10.10

$$P\left\{(\overline{X}_1 - \overline{X}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\, \sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2} < \mu < (\overline{X}_1 - \overline{X}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)}\, \sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2}\right\} = 1 - \alpha$$

dimana:

$$\sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2} = S_p\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}}$$

derajat kebebasan $\vartheta = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}}$

Contoh Soal 10.10

Seorang dosen ingin membandingkan hasil belajar mahasiswa dalam mata kuliah akuntansi di suatu universitas berdasarkan dua metode mengajar yang dipakai. Untuk itu dibuat dua kelas yaitu kelas A dan kelas B. Pada kelas A terdiri atas 12 mahasiswa yang diajar dengan metode biasa. Di kelas B terdiri dari 10 mahasiswa yang diajar dengan metode baru. Setelah diadakan tes akhir semester, ternyata mahasiswa di kelas A mendapatkan nilai rata-rata 85 dengan simpangan baku 4, sedangkan mahasiswa kelas B didapatkan rata-rata 81 dan simpangan baku 5. Diasumsikan populasi mempunyai distribusi mendekati normal dan variansinya sama. Buatlah interval kepercayaan 80% untuk menduga beda kemampuan mahasiswa pada mata kuliah akuntansi dengan dua macam metode ajar tersebut !

Jawab:

Kelas A dengan metode biasa: $\overline{X}_1$ = 85, S_1 = 4, n = 12

Kelas B dengan metode baru: $\overline{X}_2$ = 81, S_2 = 5, n = 10

Karena variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan dianggap sama, yaitu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, maka:

$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(11)4^2 + (9)5^2}{12 + n_2 - 2} = 20{,}05$

maka simpangan baku gabungan $S_p = \sqrt{20{,}05} = 4{,}48$

Sedangkan simpangan baku distribusi sampel beda dua rata-rata adalah:

$\sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2} = S_p \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}} = 4{,}48 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}} = 1{,}92$

Untuk 1 – α = 80% atau α = 20% dan derajat kebebasan $\vartheta = n_1 + n_2 - 2$ = 12 + 10 – 2 = 20, diperoleh nilai $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)} = t_{(0,10;20)} = 1{,}325$

Sehingga dengan demikian diperoleh:

$(\overline{X}_1 - \overline{X}_1) - t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)} \sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2}$ = (85 – 81) – (1,325) x (1,92) = 1,456

$(\overline{X}_1 - \overline{X}_1) + t_{\left(\frac{\alpha}{2},\vartheta\right)} \sigma_{\overline{X}1-\overline{X}2}$ = (85 – 81) + (1,325) x (1,92) = 6,544

Jadi interval kepercayaan untuk perbedaan kemampuan mahasiswa dalam mata kuliah akuntansi yang diajar dengan dua metode adalah

$P(1{,}456 < \mu_1 - \mu_2 < 6{,}544) = 0{,}80$.

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Dari populasi pegawai suatu perusahaan diambil sampel sebanyak 100 0rang dan dicatat gaji tahunan masing-masing. Rata-rata gaji mereka Rp 30.000.000 dan simpangan bakunya Rp 6.000.000. Tentukan penduagaan interval dengan kepercayaan 95 % untuk menduga berapa rata-rata gaji para pegawai perusahaan tsb!
2. Pada suatu sampel secara acak berukuran n = 500 orang di suatu kota ditemukan bahwa 340 orang diantaranya suka nonton olahraga. Hitunglah interval kepercayaan 95% untuk menduga berapa proporsi orang yang suka nonton olahraga !
3. Suatu sampel acak sebanyak 15 mahasiswa diambil dari populasi di suatu universitas. Ke-15 mahasiswa tersebut diberikan tes bahasa inggris dan diperoleh rata-rata adalah 75 dan simpangan baku 8. Buatlah interval kepercayaan 95% untuk menduga kemampuan bahasa inggris semua mahasiswa di universitas tsb !
4. Seorang pejabat bank ingin mengetahui lebih lanjut persentase debitur yang menunggak angsuran rumah pada suatu tahun tertentu. Dari sampel yang dikumpulkan sebanyak 100 nomor debitur, ternyata ada 15 debitur yang tidak melunasi kewajibannya untuk membayar angsuran. Buatlah interval

kepercayaan 95% untuk menduga berapa sesungguhnya debitur yang tidak melunasi angsuran rumah !

5. Untuk menjaga kepercayaan masyarakat terkait kualitas produksinya, sebelum dipasarkan perusahaan melakukan pengetesan terhadap daya tahan kedua jenis lampu dengan mengambil sejumlah sampel. Hasil pengetesan sbb:

Statistik	Lampu Merk A	Lampu Merk B
Besar Sampel	150	200
Rata-rata daya tahan	1.400 jam	1.200 jam
Standar Deviasi	120 jam	80 jam

Buatlah interval kepercayaan 95% untuk menduga berapa sesungguhnya beda antara dua rata-rata daya tahan kedua merk lampu tersebut !

6. Seorang pemimpin perusahaan ingin mengetahui perbedaan rata-rata gaji bulanan karyawan di perusahaan A dan B. Diambil sampel sebagai berikut:

Karyawan	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gaji Perusahaan A	40	46	50	36	38	34	42	44	30
Gaji Perusahaan B	30	24	16	25	35	40	46	38	34

Buatlah interval kepercayaan 90% untuk menduga berapa sesungguhnya rata-rata gaji karyawan perbulan di dua perusahaan tersebut !

D. DAFTAR PUSTAKA

Budiono & Koster, Wayan. (2008). *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas*. Bandung. PT Remaja Rosda Karya.