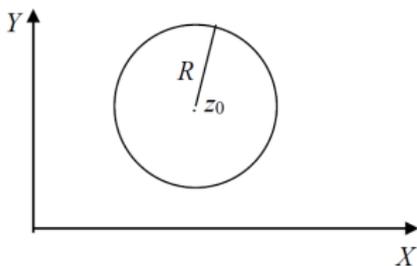


Fungsi Kompleks

Daerah di Bidang Kompleks Bagian berikut ini kita akan membahas beberapa kurva dan daerah penting dan sejumlah konsep terkait yang akan sering kita gunakan.

- **Lingkaran C** dengan pusat z_0 dan berjari-jari R , yaitu $C : |z - z_0| = R$, merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak R dari z_0 . Perhatikan ilustrasi berikut ini.



- **Lingkaran Satuan** adalah lingkaran yang berjari-jari satu dan berpusat di titik asal. Lingkaran satuan direpresentasikan dengan $|z| = 1$.

- **Cakram Lingkaran** adalah interior lingkaran C , yaitu $|z - z_0| < R$, atau bisa disebut juga sebagai cakram lingkaran terbuka atau lingkungan dari z_0 .
- **Cincin lingkaran terbuka** atau **anulus terbuka** adalah daerah antara dua lingkaran sepusat dengan jari-jari R_1 dan R_2 , direpresentasikan dengan

$$R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

- **Himpunan titik-titik** pada bidang kompleks berarti sembarang koleksi titik-titik pada bidang kompleks. Sebuah himpunan S dikatakan terbuka jika setiap titik di dalam S mempunyai suatu lingkungan yang seluruhnya terletak di dalam S . Suatu himpunan S dikatakan **terhubung** jika sebarang dua titik di dalam himpunan ini dapat dihubungkan dengan suatu garis patah-patah yang terdiri atas terhingga banyaknya ruas garis yang seluruhnya terletak di dalam S .

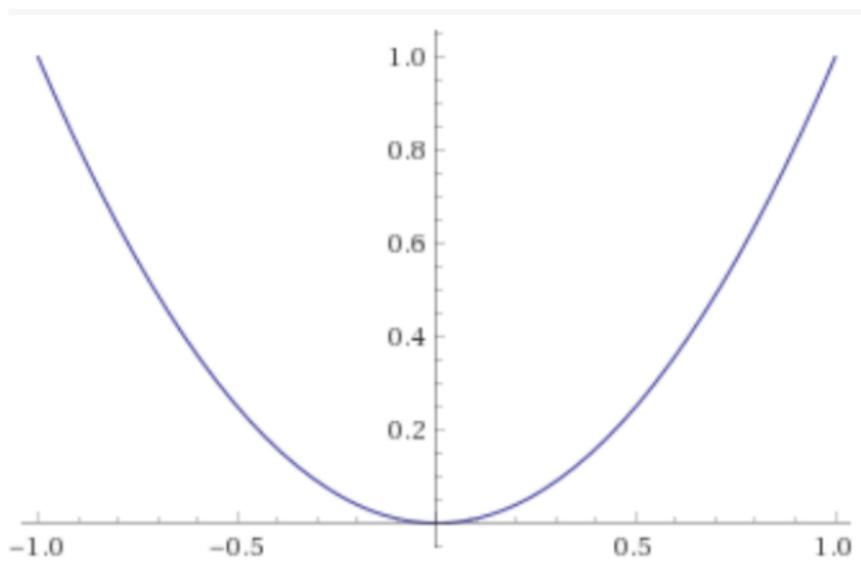
- **Domain** adalah himpunan terbuka yang menghubungkan.
- **Komplemen** himpunan S adalah himpunan semua titik yang tidak terletak di dalam S .
- **Titik Batas** himpunan S adalah titik yang setiap lingkungannya mengandung titik-titik di dalam S maupun di luar S .
- **Wilayah** atau **region** adalah sebuah himpunan yang terdiri atas sebuah domain ditambah sebagian atau seluruh titik batasnya.

Diberikan suatu fungsi $f : I \rightarrow C$ dengan I merupakan himpunan bagian dari himpunan semua bilangan kompleks C . Fungsi ini merupakan bentuk penyederhanaan fungsi yang memetakan sub himpunan bilangan real ke bidang, atau lebih dikenal sebagai fungsi bernilai vektor. Sebagai contoh, diberikan fungsi

$$f(t) = \cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

Kurva fungsi kompleks ini berupa lingkaran satuan. **Selidiki mengapa demikian!**

Selanjutnya fungsi $g(t) = t + it^2$, $-1 \leq t \leq 1$ akan membentuk kurva berupa parabola terbuka atas $y = x^2$, dari $x = -1$ hingga $x = 1$. Perhatikan ilustrasi di bawah ini.



Misalkan S merupakan sub himpunan bilangan kompleks dan fungsi f pada S adalah aturan yang menetapkan setiap z di dalam S dengan tepat satu unsur di C dan dituliskan sebagai

$$f : S \rightarrow C$$

$$z \longmapsto w = f(z)$$

Pada rumus di atas, z adalah bilangan kompleks, jadi S merupakan domain definisi fungsi f dan himpunan yang merupakan seluruh nilai fungsi f disebut sebagai range (peta) dari f . Sedangkan w adalah juga bilangan kompleks, sehingga dapat ditulis sebagai $w = u + iv$, yang bergantung pada bilangan kompleks $z = x + iy$. Jadi dapat ditulis sebagai $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Dengan demikian fungsi kompleks $f(z)$ ekuivalen dengan pasangan fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ yang keduanya bergantung pada dua peubah x dan y .

Himpunan S disebut daerah asal (domain) dari f , ditulis D_f dan $f(z)$ disebut nilai dari f atau peta dari z oleh f . Range atau daerah hasil (peta) dari f ditulis R_f , yaitu himpunan $f(z)$ untuk setiap z anggota S .

Example 6

Tentukan domain dari fungsi kompleks berikut ini!

1. $f(z) = z + 1 - i$

2. $f(z) = 4 + 2i$

3. $f(z) = z^2 - 5z$

4. $f(z) = \frac{3-z}{2z+1}$

Penyelesaian Perhatikan bahwa contoh 1-3, semua bilangan kompleks z dapat memenuhi fungsi tersebut. Oleh sebab itu, domain dari fungsi nomor 1-3 adalah semua titik pada bidang Z . Dengan kata lain, semua bilangan kompleks. Selanjutnya perhatikan bahwa untuk soal nomor 4, maka fungsi tidak terdefinisi untuk $z = -\frac{1}{2}$. Oleh sebab itu domainnya adalah seluruh titik pada bidang Z kecuali $z = -\frac{1}{2}$.

Example 7

Tuliskan $f(z) = 2z^2 - i$ dalam bentuk u dan v

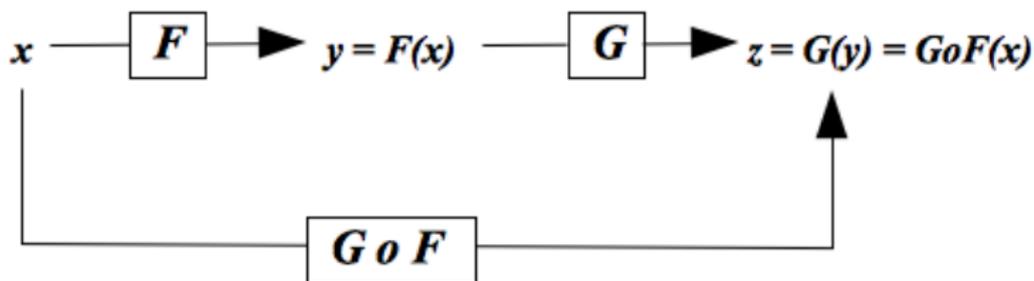
Penyelesaian Misal $z = x + iy$, maka fungsi

$$w = f(z) = 2z^2 - i = 2(x + iy)^2 - i = 2(x^2 - y^2) + i(4xy - 1).$$

Jadi $u = 2(x^2 - y^2)$ dan $v = 4xy - 1$.

Fungsi Komposisi

Diberikan fungsi $f(z)$ dengan domain D_f dan fungsi $g(z)$ dengan domain D_g . Jika $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka ada fungsi komposisi $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, dengan domain D_f .



Example 8

Diketahui fungsi kompleks $f(z) = 3z - i$ dan $g(z) = z^2 + z - 1$.
Tentukan $g \circ f$

Penyelesaian Perhatikan bahwa $R_f \cap D_f \neq \emptyset$. Oleh sebab itu diperoleh

$$g \circ f(z) = 9z^2 - 3z - 2 - 6iz.$$