Definition 22

Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan $z_0 \in D$. Jika diketahui bahwa nilai

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ada, maka nilai limit ini disebut **turunan** atau **derivatif** fungsi f di titik z_0 dan dinotasikan dengan $f'(z_0)$.
Jika $f'(z_0)$ ada, maka f dikatakan **terdifferensial** atau **differensiable** di z_0. Dengan kata lain dapat kita simpulkan bahwa

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Jika f terdifferensial di semua titik di daerah D, maka f dikatakan terdifferensial pada D.

Example 23

Akan ditunjukkan bahwa $f(z)$ terdifferensial pada $\mathbb{C}$.

Diambil sebarang titik $z_0 \in \mathbb{C}$, maka diperoleh

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0}$$

selanjutnya

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{(z - z_0)} = \lim_{z \to z_0} z + z_0 = 2z_0$$

Karena z_0 merupakan sebarang titik di $\mathbb{C}$, maka dapat disimpulkan bahwa $f(z) = z^2$ terdifferensial pada $\mathbb{C}$.

Theorem 24

Jika f fungsi kompleks dan $f'(z_0)$ ada, maka f kontinu di z_0.

Konvers dari Teorema di atas tidak berlaku, sebagai counter example. Perhatikan contoh berikut ini yang merupakan fungsi kontinu tetapi hanya terdifferensial pada titik tertentu.

Example 25

Akan ditunjukkan bahwa $f(z) = |z|^2$ kontinu di seluruh bidang kompleks, tetapi hanya terdifferensial di $z = 0$.

Perhatikan bahwa $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ (Kuadrat dari magnitudo dari z). Jika diperhatikan untuk $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, maka diperoleh $u(x, y) = x^2 + y^2$ dan $v(x, y) = 0$ (karena yang ada komponen i adalah 0). Jelas bahwa $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ kontinu. Oleh sebab itu $f(z)$ kontinu di $\mathbb{C}$. Selanjutnya perhatikan

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = 0$$

Untuk menunjukkan bahwa f tidak terdifferensial di $z \neq 0$ digunakan sebagai **contoh dberikutnya**.

Perhatikan bahwa topik pada pertemuan ke-7 Mata Kuliah FPK ini adalah turunan fungsi kompleks dengan menyelidiki apakah fungsi kompleks **differensiable** atau tidak. Untuk mempermudah proses ini, maka dikenalkan Teorema yang disebut sebagai **syarat Chaucy-Riemann**.

Theorem 26

Jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *terdifferensial pada suatu titik* $z = x + iy$*, maka pada* z *turunan tingkat pertama dari fungsi-fungsi* $u(x, y)$ *dan* $v(x, y)$ *ada dan memenuhi persamaan* **Cauchy-Riemann** *sebagai berikut.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Example 27

Perhatikan contoh fungsi kompleks sebelumnya, yaitu $f(z) = |z|^2$

Perhatikan dari fungsi kompleks yang diketahui diperoleh $u(x,y) = x^2 + y^2$ dan $v(x,y) = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Oleh sebab itu agar memenuhi **Cauchy-Riemann** diperoleh $x = 0, y = 0$. Bagaimana untuk x dan y yang lain? Tentu saja tidak dipenuhi untuk $x \neq 0$ dan $y \neq 0$.

Selanjutnya akan dipelajari Persamaan Cauchy-Riemann untuk fungsi kompleks dalam bentuk polar atau kutub.
Perhatikan bahwa jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dapat diubah dalam bentuk polar dengan mempertimbangkan hubungan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$. Dengan demikian diperoleh

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

Theorem 28

Jika $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ *terdifferensial dan kontinu pada suatu persekitaran* (r_0,θ_0) *dan jika dalalm persekitaran tersebut* $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ *ada dan kontinu di* (r_0,θ_0) *dan memenuhi persamaan Cauhcy-Riemann sebagai berikut*

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \;\; dan \;\; v_r = -\frac{1}{r}u_\theta, r \neq 0,$$

maka $f'(z)$ *ada di* $z = z_0$ *dan*

$$f'(z) = (\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)[u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0)].$$

Example 29

Diketahui fungsi kompleks $f(z) = z^3$, tentukan $f'(z)$ dalam bentuk koordinator polar/kutub.

Perhatikan bahwa $f(z) = z^3$, dengan menerapkan formula atau rumus De'Moivre, diperoleh $f(z) = r^3(\cos 3\theta) + i\sin 3\theta)$, maka diperoleh

$u = r^3\cos 3\theta \Rightarrow U_r = 3r^2\cos 3\theta$ dan $u_\theta = r^3(\text{-}\sin 3\theta)3 = -3r^3(\sin 3\theta)$

$$v = r^3\sin 3\theta \Rightarrow v_r = 3r^2\sin 3\theta \text{ dan } v_\theta = 3r^3\cos 3\theta$$

Perhatikan bahwa untuk $z \neq 0$, diperoleh

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \text{ dan } v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

Berdasarkan penjabaran sebelumnya dapat disimpulkan bahwa fungsi-fungsi yang diperoleh merupakan fungsi kontinu yang memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, maka dapat disimpulkan bahwa $f(z) = z^3$ terdifferensial untuk $z \neq 0$. Dengan demikian, turunan $f'(z)$ dalam koordinat polar/ kutub adalah sebagai berikut:

$$f'(z) = (\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)[3r^2\cos 3\theta + i3r^2\sin 3\theta].$$

Aturan Pendifferensialan I

Jika $f(z), g(z), h(z)$ adalah fungsi-fungsi kompleks serta $f'(z), g'(z), h'(z)$ ada, maka berlaku formula berikut ini.

1. $\frac{d(c)}{dz} = 0, \frac{d(z)}{dz} = 1$ dengan c konstanta
2. $\frac{d[cf(z)]}{dz} = cf'(z)$
3. $\frac{d}{dx}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$
4. $\frac{d}{dx}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

Aturan Pendifferensialan II

Jika $f(z), g(z), h(z)$ adalah fungsi-fungsi kompleks serta $f'(z), g'(z), h'(z)$ ada, maka berlaku formula berikut ini.

1. $\frac{d}{dx}(\frac{f(z)}{g(z)}) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$
2. $\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$
3. Jika $h(z) = g(f(z))$, maka $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$ yang biasa kita sebut dengan aturan rantai

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\theta}\frac{d\theta}{dz}$$