FUNGSI PEUBAH KOMPLEKS

Oleh:

Ganis Yoga Purnama (1907050027)

Fungsi Eksponensial, Fungsi Logaritma, dan Fungsi trigonometri

- Ringkasan Topik

Materi ini difokuskan pada definisi pemetaan dan transformasi, serta memperkenalkan fungsi kompleks elementer tertentu beserta sifat aljabar dan analitiknya. Materi fungsi-fungsi kompleks pada pembahasan kali ini meliputi Fungsi eksponen, Fungsi Logaritma, dan Fungsi trigonometri hanya dasarnya saja, sifat-sifat pemetaan fungsi-fungsi ini akan dipelajari pada paket-paket selanjutnya. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Fungsi Eksponensial

Untuk bilangan kompleks $z = x + iy$, fungsi eksponensial didefinisikan dengan

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y)$$

Fungsi eksponensial merupakan fungsi seluruh, karena fungsi-fungsi penyusunnya beserta turunannya kontinu dimana-mana dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann. Sehingga diperoleh turunannya adalah

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

Fungsi Eksponensial

Jika $z = x + iy$ dan $w = u + iv$, maka

$$e^{z+w} = e^{(x+u)}[\cos(y+v) + i\sin(y+v)]$$

$$= e^{x}e^{u}[(\cos\ y\cos v - \sin y\sin v) + i(\sin y\cos v + \cos y\sin v]$$

$$= e^{x}e^{u}[(\cos\ y + i\sin y)(\cos v + i\sin v)$$

$$= e^{z}e^{w}$$

Fungsi Eksponensial

Sifat-sifat :

- $e^z \neq 0$
- $e^0 = 1$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$ (*Fungsi periodik dengan periode* 2π).
- $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
- $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$
- $e^z e^w = e^{z+w}$
- $|e^z| = e^x$ dan Arg $e^z = y + 2k\,\pi i$

CONTOH

Tentukan semua z sehingga $e^z = 1 + i$.

- Penyelesaian

$$1 + i = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Jadi $z = ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i\ .\ , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Fungsi Logaritma

Pada fungsi real, fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponensial. Sementara fungsi eksponensial kompleks tidak mempunyai invers. Seperti terlihat dalam contoh 1, fungsi eksponensial $e^z = w$, akan mempunyai tak hingga penyelesaian.

Jika $z \neq 0$, didefinisikan fungsi logaritma untuk z, sebagai

$$\ln z = \ln r + i \arg z, \text{ dimana } r = |z| .$$

Fungsi Logaritma

Jadi untuk setiap nilai argumen akan memiliki logaritma yang berbeda. Untuk suatu nilai $\ln z$, diperoleh

$$e^{\ln z} = e^{\ln r + i \arg z} = e^{\ln r} e^{i \arg z} = z\,.$$

sedangkan

$$\ln(e^z) = \ln e^x + i \arg e^z = x + i(y + 2\pi) = z + 2k\pi i.$$

Dipunyai juga

$$\begin{aligned} \ln(zw) &= \ln(|z|\,|w|) + i \arg(zw) \\ &= \ln|z| + i \arg z + \ln|w| + i \arg w + 2k\pi i \\ &= \ln z + \ln w + 2k\pi i \end{aligned}$$

- (k bilangan bulat).

Fungsi Logaritma

Sifat-sifat :

- $\ln \frac{z}{w} = \ln z - \ln w$
- $\ln z^p = p \ln z$
- $\ln(zw) = \ln z + \ln w$
- $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$

Perhatikan bahwa $\ln z$ adalah fungsi yang berharga banyak dengan nilai tak hingga banyaknya. Untuk $k = 0$ (jadi fungsi menjadi berharga satu) didefinisikan nilai utama fungsi logaritma (*principal logarithm atau principal branch*) , ditulis $Ln\ z, yaitu$

$$Ln\ z = \ln r + i\ Arg\ z\ ,$$

dengan $Arg\ z$ adalah nilai utama argumen z.

CONTOH

Tentukan logaritma dari $z = 2$ dan nilai utamanya.

- Penyelesaian.

Perhatikan bentuk kutub dari $z = 2$, yaitu

$$z = 2 = 2\left(cos\,\pi\,k\,2 + i\,sin\,2k\pi\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

sehingga

$$\ln z = ln\,2 + i\,2k\pi\,, k \text{ bulat.}$$

Nilai utamanya adalan ln 2.

Fungsi Trigonometri

Fungsi sinus dan cosinus didefinisikan sebagai berikut :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} , dimana \ z = x + iy .$$

Dengan mengingat kalkulus bilangan real diperoleh

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \sec z = \frac{1}{\cos z}, \cos ecz = \frac{1}{\sin z}$$

Sedang turunan-turunannya adalah

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z , \frac{d}{dz} \sin z = \cos z , \frac{d}{dz} \tan z = sec^2 z$$

Fungsi Trigonometri

Bagian real dan bagian imajiner dapat dicari sebagai berikut :

$$\cos z = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2}$$

$$= \cos x \frac{(e^{y}+e^{-y})}{2} - i \sin x \frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

$$= \cos x \cos y - i \sin x \sin y$$

Secara sama dapat diperoleh .

$$\sin z = \sin x \cos y - i \cos x \sin y$$

Fungsi Trigonometri

Sifat-sifat :

- $\sin(z+2\pi) = \sin z\,, \cos(z+2\pi) = \cos z$
- $|\sin z|^2 = sin^2 x + sin^2 y, |\cos z|^2 = cos^2 x + sin^2 y$
- $sin^2\, z + cos^2 z = 1$
- $\sin z = 0$ jika dan hanya jika $z = k\pi$ dan $\cos z = 0$ jika dan hanya jika $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- $\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$
- $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
- $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

CONTOH

Tentukan semua z sehingga sin z = 2.

- Penyelesaian.

Perhatikan bahwa

$\sin z = \sin x \cos y + i \cos x \sin y = 2.$

Sehingga $sin\, x\; cos\, y \; = \; 2$ dan $cos\, x\; sin\, y \; = \; 0.$

Jika $sin\, y \; = \; 0$ maka $cos\, y \; = \; 1$ sehingga $sin\, x \; = \; 2$. Hal ini tidak mungkin terjadi.

Sehingga haruslah $cos\, x \; = \; 0$ sehingga $sin\, x \; = \; 1$ atau $sin\, x \; = - \; 1$

Jika $sin\, x \; = - \; 1$ maka $cos\, y \; = - \; 2$ (tidak mungkin, inggat fungsi cosh > 0).

Jadi $sin\, x \; = \; 1$, sehingga $cos\, y \; = \; 2$

CONTOH

Atau

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^y + e^{-y} = 4$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 4e^y + 1 = 0$$

Diperoleh

$$e^y = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Atau

$$y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

Dengan demikian $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

REFERENSI

- Kadir. (2016). *Fungsi Peubah Kompleks*. UIN Jakarta.
- Kusumawinahyu, W. M. (2017). *Fungsi Kompleks*. Universitas Brawijaya Press.
- Lubab, A. (2015). Fungsi kompleks: buku perkuliahan Program S-1 Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Sunan Ampel Surabaya.