Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUG2A3/ Matematika Diskret

Mahmud Imrona – Rian Febrian Umbara

Pemodelan dan Simulasi

Himpunan

Sifat Operasi Himpunan

Hukum-hukum Himpunan

1. Hukum identitas:
   a. $A \cup \varnothing = A$
   b. $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi:
   a. $A \cap \varnothing = \varnothing$
   b. $A \cup U = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen:
   a. $A \cup \bar{A} = U$
   b. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten:
   a. $A \cap A = A$
   b. $A \cup A = A$
5. Hukum involusi:
   a. $\overline{(\bar{A})} = A$
6. Hukum penyerapan (absorpsi):
   a. $A \cup (A \cap B) = A$
   b. $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif:
   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$
8. *Hukum asosiatif:*
   a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Hukum Distributif dan De Morgan

9. Hukum distributif:
   a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

10. Hukum De Morgan:
    a. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

11. Hukum 0/1
    a. $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$
    b. $\overline{\mathrm{U}} = \phi$

Dualitas

- Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang valid.

- Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identitas*) yang melibatkan himpunan dan operasi: $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** diperoleh dari *S* dengan mengganti:

  $\cup \Leftrightarrow \cap$, $\cap \Leftrightarrow \cup$, $\emptyset \Leftrightarrow U$, $U \Leftrightarrow \emptyset$ sedangkan komplemen tetap seperti semula,

  maka identitas *S** valid dan disebut *dual* dari identitas *S*.

Contoh Dualitas

- Hukum de Morgan pertama merupakan dualitas dari hukum de Morgan kedua dan sebaliknya:

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ {*hukum de Morgan pertama*}

Pada ruas kiri gantilah: $\cup$ dengan $\cap$

Pada ruas kanan gantilah: $\cap$ dengan $\cup$

Maka didapat :

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ {*hukum de Morgan kedua*}

Teorema Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

TEOREMA: Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ {*hukum komutatif*}

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ {*hukum asosiatif*}

Sifat CARTESIAN PRODUCT (PERKALIAN CARTESIAN)

- Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
- Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
- Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 1 Pembuktian Identitas Himpunan dengan sifat

- Tunjukan bahwa persamaan himpunan di bawah ini adalah valid:

$$B \cap (B - A) = B - A$$

Jawab:

$$\begin{aligned}
B \cap (B - A) &= B \cap (B \cap A^C) && \{\textit{Definisi operasi selisih}\} \\
&= (B \cap B) \cap A^C && \{\textit{Hukum komutatif}\} \\
&= B \cap A^C && \{\textit{Hukum idempotent}\} \\
&= B - A && \{\textit{definisi operasi selisih}\}
\end{aligned}$$

Contoh 2 Pembuktian Identitas Himpunan dengan sifat

- Tunjukan bahwa persamaan himpunan di bawah ini adalah valid:

$$A \cup (B - A^C) = A$$

Jawab:

$$\begin{aligned} A \cup (B - A^C) &= A \cup (B \cap (A^C)^C) && \{\textit{definisi operasi selisih}\} \\ &= A \cup (B \cap A) && \{\textit{karena } B \cap A \subseteq A\} \\ &= A \end{aligned}$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Untuk dua himpunan A dan *B*:
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
- Untuk tiga buah himpunan *A*, *B*, dan *C*, berlaku
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- Bagaimana untuk n himpunan?
  - Irisan dengan jumlah himpunan ganjil: +
  - Irisan dengan jumlah himpunan genap: -

Contoh Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

  Penyelesaian:

  $|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$

  $|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$

  $|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

  Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Partisi

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, …, A_n sedemikian sehingga:

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$, dan
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

› **Contoh :** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

- maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi dari A.
- maka $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$ juga partisi dari A.


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU