BAB IV
KUANTIFIKASI

A. Konstanta dan Variabel

1. Konstanta

Untuk menunjuk suatu anggota tertent dari semesta pembicaraannya, kita memerlukan suatu lambang dari anggota tersebut. Lambang yang dimaksud itu tidak lain adalah nama dari anggota tersebut. Sebab nama adalah unsur bahasa yang dapat diucapkan dan ditulis. Misalnya saja, lambang dari seseorang adalah namanya. Dalam bahasa matematika lambang itu disebut konstanta

Definisi 5.1: Konstanta adalah suatu lambang (tanda) untuk menunjuk suatu anggota tertentu dari semesta pembicaraannya.

Contoh 5.1

1. Jika semesta pembicaraannya (SP) adalah himpunan semua bilangan real, maka **5** adalah konstanta
2. Jika semesta pembicaraannya adalah himpunan nama-nama ibu kota dari semua negara Asia, maka **Teheran** adalah sebuah konstanta

2. Variabel

Definisi 5.2: Variabel (peubah) adalah lambang untuk menunjuk anggota sebarang dari semesta pembicaraannya. Lambang dalam definisi di atas biasanya diwujudkan dengan huruf –huruf : **x, y, z, dan sebagainya**. Peranan variabel sama dengan peranan tempat kosong dalam suatu formulir atau model :

Contoh 5.2

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : ………………….

Jabatan : ………………….

Alamat : ………………….

1. $\triangle = 41 - 15$
2. $\square + 2 = 17$

Setelah tempat kosong, $\triangle$, $\square$ diisi dengan konstanta tertentu maka terjadilah kalimat deklaratif. Tempat kosong, $\triangle$ dan $\square$ menunjuk anggota sebarang dari semesta pembicaraannya. Lambang – lambang seperti itu disebut variabel. Oleh karena peranan itulah tidak sedikit penulis yang mendefinisikan bahwa variabel adalah lambang (simbol) yang menempati konstanta. Hal ini disebabkan, karena variabel pemegang tempat (*place holder*).

A. Kalimat Terbuka dan Kuantor

1. Kalimat Terbuka

Definisi 5.3: Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel.

Contoh kalimat terbuka antara lain adalah persamaan, pertidaksamaan.

Apakah persamaan itu ?

Persamaan adalah kalimat terbuka yang memuat ungkapan sama dengan (=).

Contoh 5.3

$x^2 - 3x + 2 = 0$

Jika kita substitusikan konstanta 1 kemudian 2, ke dalam variabel pada persamaan itu maka persamaan itu menjadi kalimat deklaratif bernilai benar, maka 1 dan 2 dalam persamaan itu disebut penyelesaian. Jadi penyelesaian suatu persamaan adalah konstanta tertentu yang bilamana kita substitusikan ke dalam variabel pada suatu persamaan , maka terjadilah kalimat deklaratif bernilai benar.

2. Kuantor

Perhatikan kalimat terbuka :

"….. adalah gadis cantik " atau

" x adalah gadis cantik "

Kalimat terbuka seperti contoh di atas bukanlah kalimat deklaratif ,karena kalimat terbuka tidak mempunyai nilai kebenaran, benar (B) atau salah (S).

Agar kalimat terbuka menjadi kalimat deklaratif dapat dilakukan dengan dua cara yaitu:

a. Mengganti variabel dengan konstanta tertentu

Contoh 5.4

……. adalah gadis cantik atau x adalah gadis cantik.

Jika variabel x kita ganti dengan konstanta tertentu misalnya Siti, maka kalimat tersebut diucapkan : "Siti adalah gadis cantik"…………………(1).

Kalimat terakhir merupakan kalimat faktual yang nilai kebenarannya perlu diadakan penyelidikan. Bila Siti seperti tomblok maka kalimat (1) adalah kalimat deklaratif bernilai salah (S), akan tetapi bila Siti ternyata seperti bidadari , maka kalimat (1) adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar (B).

b. Dengan menambahkan kuantor di depannya

Definisi 5.4: Kuantor adalah simbol yang dibubuhkan di depan suatu kalimat terbuka sedemiian hingga kalimat terbuka tersebut menjadi kalimat deklaratif.

Kuantor menyatakan pengertian " **berapa banyak" .**

Ada dua macam kuantor yaitu

1. **Kuantor umum atau kuantor universal (*Universal Quantifier)***

Bentuknya $(\forall x).P(x)$ dibaca untuk semua x berlaku x mempunyai sifat P (semua x mempunyai sifat P). Simbol (lambang) "$\forall$"diambil dari ucapan Inggris"*for all it holds true that...."*

Contoh 5.5

Perhatikan kalimat terbuka " $x^2 \geq 0$dengan semesta pembicaraan (SP) adalah himpunan bilangan real. Jika kalimat tebuka ini dibubuhi kuantor " $\forall$ " didepannya , maka kalimat di atas menjadi : ($\forall$x)($x^2 \geq 0$) dan diucapkan : "untuk setiap x berlakulah $x^2 \geq 0$ " adalah suatu pernyataan yang bernilai benar.

Perhatikan, bahwa setiap pernyataan berkuantor ini ekuivalen dengan implikasi.

Bila pada contoh di atas $x \in R$ disimbolkan dengan R(x) dan $x^2 \geq 0$ disimbolkan dengan M(x), maka pernyataan di atas dapat disimbolkan sebagai : $"(\forall(x)R(x) \Rightarrow M(x))$.

2. Kuantor khusus atau kuantor eksistensial (*Existential Quatifier*)

Bentuknya : $(\exists x).P(x)$ diucapkan "terdapat / ada x yang mempunyai sifat P atau beberapa x mempunyai sifat P atau ada sekurang - kurangnya terdapat satu x dengan sifat P.

Huruf $\exists$ berasal dari ucapan Inggris *"there exist are x suck that…."*

Contoh 5.6

Perhatikan kalimat terbuka $x^2 - 3x - 2 = 0$, $x \in R$, yang diberi simbol " K(x) ", maka " ($\exists x$)(K(x)) dan dibaca : "terdapat x atau beberapa x atau ada sekurang-kurangnya satu x sedemikian hingga $x^2 - 3x + 2 = 0$ ", adalah suatu kalimat yang bernilai benar.

Catatan : Perhatikan, bahwa dalam bahasa matematika kata "**beberapa"** artinya **"sekurang-kurangnya satu"**, sedangkan dalam bahasa sehari-hari kata itu mengandung arti jamak, yaitu **" sekurang-kurangnya dua".**

Perhatikan beberapa contoh di bawah ini :

1 Katakan bahwa P(x) adalah kalimat terbuka : $x + 2 > 7$

Jika pada kalimat tersebut dibubuhi kuantor universal , maka dipeoleh kalimat berkuantor : $(\forall x)(x+2 > 7)$. Kalimat ini merupakan pernyataan (baca : kalimat deklaratip) yang bernilai salah (S) , sebab kita dapat menemukan x = 2 sehingga diperoleh kalimat yaitu : $3 + 2 < 7$. Namun bilamana pada kalimat di atas diubuhi kuantor eksistensial maka diperoleh kalimat berkuantor : $(\exists x)(x + 2 > 7)$, menghasilkan pernyataan yang benar , sebab dengan menganbil $x = 9$ saja , diperoleh kalimat deklaratip yang bernilai benar (B)

2 $(\forall x \varepsilon R)(x^2 < 0)$, adalah pernyataan yang bernilai salah (S) . Hal ini disebabkan setiap bilangan real bila dikuadratksn menghasilkan bilangan positip atau nol. Suatu persaman bila dibubuhi kuantor

universal menghasilkan pernyataan (kalimat deklaratip) yang bernilai benar disebut **identitas**.

Misanya : $(x + a) (x - a) = x^2 - a^2$, sebab $(\forall x) . [(x + a)(x - a) = x^2 - a^2]$

B. **Pengkuantoran Kalimat Terbuka dengan Dua Variabel**

Apa yang diuraikan di atas adalah kalimat terbuka dengan sebuah variabel , ini tidak berarti jika kalimat berkuantor pasti hanya terdiri dari satu variabel saja. Berikut ini akan kita bahas kalimat berkuantor dengan dua variabel, misalnya x dan y dengan notasi P(x , y) , Q(x , y), R(x , y) dan sebagainya.

Untuk mengubah kalimat terbuka dengan dua variabel menjadi kalimat deklaratip diperlukan dua buah kuantor . Bagaimana kombinasi dari dua kuantor itu diperlukan definisi

Definisi 5.5: $(\forall x)(\exists y) P(x,y) \Leftrightarrow (\forall x) [(\exists y) P(x,y)]$

Diucapkan : " Untuk setiap x, terdapat / ada y sehingga P(x,y) "

Jika pada kalimat terbuka dengan dua variabel hanya diperlukan satu kuantor saja , maka kalimat berkuantor yang baru itu masih tetap dianggap sebagai kalimat terbuka dengan satu variabel, namun bentuknya berubah menjadi kalimat terbuka dengan satu variabel saja. Adapun yang dianggap variabel adalah variabel yang tidak dibubuhi kuantor

Contoh 5.7

1 $(\forall x).P(x,y) \Leftrightarrow$ adalah kalimat terbuka dengan satu variabel y

2 $(\exists y).Q(x,y) \Leftrightarrow$ adalah kalimat terbuka dengan satu variabel x

Definisi 5.6: $(\exists y)(\forall x). P(x , y) \Leftrightarrow (\exists y) [(\forall x) P(x , y)]$

Diucapkan : " Terdapat / ada y sehingga untuk setiap x , P(x,y) "

Contoh 5.8

1. Jika P(x,y) kalimat terbuka : $2x – y = 3$, maka pernyataan berkuantor : $(\forall x)(\exists y) . (2x - y = 7)$ merupakan kalimat deklaratip bernilai benar.
2. Jika Q(x,y) kalimat terbuka : $2x + 3y = 10$, maka pernyataan berkuantor : $(\forall x) (\exists y) . (2x + 3y = 10)$, merupakan kalimat deklaratip yang bernilai benar, sedangkan

pernyataan berkuantor : ($\exists$ y)($\forall$ x)(2x + 3y = 10) merupakan kalimat deklaratip yang bernilai salah

Latihan 5.1.

1. Tulislah implikasi yang ekuivalen dengan pertnyataan berikut ini :
   a. Tidak ada bentuk akar ang ekuivalen dengan bilangan desimal.
   b. Setiap bilangan genap lebih dari 2 dapat dinyatakan sebagai jumlah dua bilangan prima (dugaan Goldbach).
   c. Semua tahun yang bilangannya habis dibagi dengan 4 adalah tahun kabisat
2. Dengan menggunakan huruf-huruf yang disarankan, terjemahkan setiap pernyataan berikut dengan pernyataan berkuantor :
   a. Semua mahasiswa adalah pandai (M, P)
   b. Beberapa siswa menyukai pelajaran matematika (N, T)
   c. Beberapa pemuda yang mengenakan jaket kuning adalah jukir (D, J)
   d. Beberapa matriks persegi tidak mempynyai invers (G, I)
   e. Semua objek kajian matematika adalah abstrak (K , A)
3. Jika semesta pembicaraan adalah himpunan bilang-bilangan real, tuliskan dalam kalimat sehari-hari serta nilai kebenaran kalimat berkuantor berikut :

   a. $(\forall x)(|x| = x)$
   b. $(\exists x)(|x \geq x)|$.
   c. $(\forall x)(|x| < x)$
   d. $(\exists x)(|x| \leq 0)$
   e. $(\forall x)(x^2 > 0)$
   f. $(x^2 > 0)$

Tidak jarang bahwa dalam suatu kalimat mungkin digunakan lebih dari satu kuantor, misalnya "($\forall$x)($\forall$y).P(x,y)" dan dibaca : "untuk semua *x* dan semua *y* sedemikian hingga *x* berada dalam relasi P dengan *y* ".

Kalimat di atas biasanya ditulis "($\forall$x,y).P(x,y) ". Demikian pula kalimat : ($\exists$x)($\exists$y).P(x,y) atau ($\exists$x,y).P(x,y) dan diucapkan : "ada suatu x dan suatu y sedemikian hingga x berada dalam relasi P dengan y".

Contoh 5.9

Pandanglah persamaan y = 2x – 3

Meskipun kita gunakan sebuah kuantor -kuantor misalnya :

($\forall$x)(y = 2x - 3) maupun ($\exists$x)(y = 2x - 3) tetap tidak mempunyai arti benar atau salah . Akan tetapi jika bubuhi dua kuantor eksistensial yaitu : ($\exists$x)($\exists$y)(y = 2x

- 3) maka diperoleh kalimat (pernyataan) yang bernilai benar . Kalimat tersebut diucapkan : " ada (terdapat) bilangan x dan y sedemikian hingga y = 2x - 3.

Demikian pula $(\exists x)(y + x = x + y)$ atau pun $(\forall x)(y + x = x + y)$ kedua- duanya tidak mempunyai nilai kebenaran, karena bukan suatu pernyataan.

Bagaimana jika kita bubuhi dua kuantor universal yaitu :

$(\exists x)(\exists x)(y + x = x + y)$ dibaca : "ada atau terdapat atau beberapa x dan y sehingga y + x = x + y ". Pernyataan ini pun salah Pernyataan yang benar adalah : $(\forall x)(\forall y)(y + x = x + y)$, diucapkan : " untuk semua x dan y berlakulah y + x = x + y ", merupakan sebuah pernyataan yang bernilai benar.

Dalam matematika sekolah menengah seringkali "kuantor" terutama kuantor universal tidak ditulis. Misalnya, dalam aljabar terdapat rumus :

$$\mathbf{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).}$$

Padahal yang dimaksud dalam rumus tersebut adalah

$(\forall x)(\forall y).(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$ **atau**

$(\forall x, y).(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$

Contoh 5.10

Semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan real . Tentukanlah nilai logika dari kalimat-kalimat berikut :

a. $(\exists x)(\forall y).\ xy = y$

Jawab **: Benar** . Ambil x = 1 , maka (1)(y) = y

b. $(\exists x)(\forall y) .\ xy = x$

Jawab : **Benar.** Ambil x = 0 , maka (0))(y) = 0

c. $(\forall x)(\exists y).\ x + y = y + x = 0$

Jawab: **Benar .** Ambil sepasang bilangan sekawan 7 dan -7 , maka (7) + (-7) = (-7) + (7) = 0.

d. $(\exists x, y).(x < y \Rightarrow y^2 < x^2)$

Jawab: **Benar.** Ambil saja x = -5 dan y = -3, maka 9 < 25

C. Ingkaran/ Negasi dari Kalimat Berkuantor

Perhatikan beberapa contoh berikut :

1) Jika x : **"** Semua kucing mempunyai ekor"

Pernyataan ini adalah benar karena setiap kucing pasti mempunyi ekor. Negasinya harus mengatakan bahwa sekurang-kurangnya ada satu kucing yang tidak mempunyai ekor , atau " Beberapa kucing tidak mempunyai ekor"

Jadi, "Semua kucing mempunyai ekor" negasinya adalah "Beberapa kucing tidak mepunyai ekor".

Secara umum dikatakan " Semua x adalah P" negasinya adalah " Beberapa x adalah tidak P"

2) Jika x :" Beberapa penerbang adalah wanita "

Pernyataan itu mengatakan bahwa sekurang-kurangnya ada satu penerbang wanita, maka negasinya harus mengatakan "Semua penerbang adalah bukan wanita atau tidak ada penerbang wanita".

Jadi, "Beberapa x adalah P" negasinya "Semua x tidak P".

Dengan demikian negasi kalimat berkuantor berlaku aturan sebagai berikut :

1. $\overline{(\forall x).P(x)}$ ek. $(\exists x).\overline{P(x)}$
2. $\overline{(\exists x).P(x)}$ ek. $(\forall x).\overline{P(x)}$

Contoh 5.11

1. Semua pelajar adalah belajar. Ingkarannya adalah : ada pelajar yang tidak belajar. "Semua tamu laki – laki lewat pintu belakang" ingkarannya adalah "ada tamu laki – laki yang tidak lewat pintu belakang".
2. Ingkaran dari kalimat :
   Jika guru tidak hadir maka semua siswa bersuka ria, adalah :
   "Guru tidak hadir dan semua siswa bersuka ria".
   "Guru tidak hadir dan ada siswa yang tidak bersuka ria "
   Diucapkan : "Ada siswa yang tidak bersuka ria walaupun guru tidak hadir".
3. Beberapa guru susah jika banyak siswa yang tidak lulus ujian
   Dalam bentuk implikasi :
   Banyak siswa yang tidak lulus ujian $\Rightarrow$ beberapa guru susah.
   Ingkarannya adalah : Banyak siswa yang tidak lulus ujian tetapi semua guru tidak susah. Akan lebih sedap bila diucapkan : "semua guru tidak susah walaupun banyak siswa yang tidak lulus ujian".

D. Urutan Kuantor – Kuantor

Sifat-sifat :

$(\exists x)(\exists y).P(x,y)$ ek. $(\exists y)(\exists x).P(x,y)$ .... (i)

$(\forall x)(\forall y).P(x,y)$ ek. $(\forall y)(\forall x).P(x,y)$ .... (ii)

Dari ke dua sifat di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa kuantor – kuantor yang sejenis boleh ditukar tempatnya. Sifat ini disebut sifat komutatif.

Bagi kuantor yang tidak sejenis hal itu tidak berlaku:

$(\exists y)(\forall x)..R(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y).P(x,y)$ .... (iii)

Sifat (iii) kelihatannya aneh, akan tetapi bilamana kita teliti lebih mendalam maka hal ini tidak perlu diragukan, sebab pada bentuk kalimat implikasi, jika anteseden bernilai S apapun nilai konsekuennya implikasi itu bernilai benar (B).

Contoh 5.12

1. Semesta pembicaraannya adalah himpunan semua bilangan real. Selanjutnya apakah pernyataan berikut benar atau salah. Jika salah berilah sebuah contoh.

   a. $(\forall x).|x| = x$

      Jawab : Salah . Ambil $x = -5 \Rightarrow |-5| \neq -5$

   b. $(\exists x).|x| = 0$

      Jawab : Benar

   c. Semesta pembicaraannya S = { 1, 2, 3, 4, 5}.

      Apakah pernyataan berikut benar atau salah. Jika salah berilah satu contoh.

      $(\forall x).x + 3 < 12$

      Jawab : Benar

   d. $(\exists x)3x + 2 < 10$

      Jawab : Salah, ambil x = 3, maka 11 > 10

   e. (∀x)(∀y). x + y ≤ 10

      Jawab : Benar

   f. (∀x)(∀y). x + y = 10

      Jawab : Salah, ambil saja x = 3, maka tidak akan ada y sehingga x + y = 10.

   g. (∃x)(∀y).xy = x

      Jawab : Benar

Latihan 5.2

1. Semesta pembicaraannya adalah himpunan semua orang.
   Jika *M(*x) diartikan *x* mahasiswa dan P(*x*) diartikan *x* pandai. Tulis dalam simbolisme logika pernyataan di bawah ini:
   (a) Semua mahasiswa adalah pandai
   (b) Beberapa mahasiswa tidak pandai
   (c) Ada mahasiswa yang berbohong
2. Ingkarilah kalimat – kalimat di bawah ini
   (a) Semua buruh tidak bekerja jika mandor tidak hadir
   (b) Semua guru susah jika ada siswa yang tidak lulus ujian
   (c) Jika Gunung Merapi meletus maka semua sekolah di Yogyakarta diliburkanx
3. Diketahui S = { 1, 2, 3, 4, 5}. Tentukanlah nilai kebenaran dari pernyataan berikut :
   (i) $(\exists x).x+1<5$
   (ii) $(\forall x).x \le 5$
   (iii) $(\forall x).x+4<10$
   (iv) $(\exists x).x+2=7$
   (v) $(\forall x)(\forall y).x+y \le 10$
   (vi) $(\exists x)(\forall y).x+y=10$
   (vii) $(\exists x)(\forall y).xy=x$
   (viii) $(\forall x)(\exists y).x+y=10$
4. Tulis dalam simbolisme logika pernyataan – pernyataan berikut
   (i) Ada mahasiswa yang kurang ajar (M , K)
   (ii) Setiap mahasiswa selain Nyoman pasti membenci Rita (M,N,R)
   (iii) Tidak ada hari yang sepanas hari ini (H,P)
   (iv) Tidak ada orang yang hidup di bulan (O , H)
5. Semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan real. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut dan carilah pula negasinya
   a. $(\forall x)(\exists y)(x < y)$
   b. $(\forall x)(\forall y)(x < y)$
   c. $(\exists x)(\exists y)(x < y)$
   d. $(\exists x)(\exists y)(y > x)$
   e. $(\forall x)(\forall y)(y > x)$
   f. $(\forall x)(\exists x)(y > x)$
6. Semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan real. Tentukanlah nilai logika pernyataan : $(\exists x)(x^2 < 0 \Rightarrow x < 0)$.
7. Tentukan negasi dari pernyataan bentuk
   a. $(\exists x)\ (x^2 = 3x)$
   b. $(\forall x)\ (x < x - 2)$
   c. $(\forall x)\ (2x + 1 = x)$

d. $(\exists x)\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$

8. Jika semesta pembicaraannya H = { 1, 2, 3, 4, 5 } tentukan nilai kebenaran dari negasi pernyataan berikut :
   a. $(\forall x)\ (2 + 3x < 10)$
   b. $(\exists x)\ (5 + x = 9)$
   c. $(\forall x)\ (2 + x \leq 8)$
   d. $(\exists x)\ (2 + 3x > 7)$
   e. $(\forall x)\ (x < x + 3)$
   f. $(\exists x)\ (x^2 = x)$
9. Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut :
   a. $(\forall x)\ [x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)]$
   b. $(\exists x)\ (x^2 + 2x - 8 = 0)$

10. Dengan menggunakan prosedur aritmatika manakah diantara persyaratan-persyaratan bentuk merupakan tautologi.
    a. $[\,(p \Rightarrow q) \wedge \bar{p}\,] \Rightarrow \bar{q}$
    b. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\,p \Rightarrow (p \,\&\, q)\,]$
    c. $[\,(p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge p\,] \Rightarrow (q \Rightarrow p)\,]$
    d. $[\,a \Rightarrow (b \wedge c)] \Rightarrow [\,b \Rightarrow (d \wedge e) \Rightarrow (a \Rightarrow d)]$
    e. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow [\,a \Rightarrow (a \,\&\, d)\,]$
11. Dengan menggunakan
    (i) Aturan p dan t
    (ii) Aturan Cp

    Buktikan keabsahan argumen-argumen berikut :
    a. $p \Rightarrow q,\ \overline{q \,\&\, r} \nvdash p \Rightarrow \bar{r}$
    b. $\bar{a} \Rightarrow (b \Rightarrow c),\ \bar{d} \Rightarrow (c \Rightarrow t),\ a \Rightarrow d = b \Rightarrow t$
    c. $(A \Rightarrow B) \,\&\, (C \Rightarrow D),\ (B \vee D) \Rightarrow G,\ \bar{E},= A \vee C$
    d. $(V \Rightarrow \bar{W}) \,\&\, (X \Rightarrow Y),\ (\bar{W} \Rightarrow Z) \,\&\, (Y \Rightarrow \bar{A}),\ (Z \Rightarrow \bar{B}) \wedge (A \Rightarrow C),\ V \,\&\, X = B \wedge \bar{C}$