BAB V
KALKULUS PERNYATAAN II

A. PENURUNAN KESIMPULAN

Salah satu tujuan pembelajaran logika adalah untuk menyimpulkan absah atau tidak absahnya suatu argumentasi. Yang disebut argumentasi adalah suatu penegasan dari beberapa pernyataan benar yang diketahui yang disebut premis. Melalui langkah-langkah logis dapat diturunkan suatu pernyataan yang benar yang disebut kesimpulan atau konklusi. Karena argumentasi merupakan suatu pernyataan, maka tentu mempunyai nilai kebenaran.

Argumentasi yang bernilai benar disebut argumentasi yang absah (valid). Sedangkan argumentasi yang bernilai salah atau dapat salah ataupun benar disebut argumentasi tidak absah (tidak valid). Suatu argumentasi dikatakan valid, jika pada tiap baris premis-premis benar dan konklusi benar.

Definisi 4.1: Argumen adalah pernyataan dimana sekumpulan proposisi P_1, P_2, P_3, …., P_n menghasilkan proposisi lain Q.
P_1, P_2, P_3, …., P_n disebut premis dan Q disebut kesimpulan atau konklusi

Berikut ini ditampilkan kembali tautologi yang sangat penting dalam penurunan kesimpulan atau dalam pembuktian apakah suatu argumen itu valid atau tidak. Tautologi tersebut antra lain :

1. *Modus Ponando Ponens (Modus Ponens)*
   $(p \Rightarrow q) \,\&\, p \Rightarrow q$
2. *Modus Tolendo Tollens (Modus Tollens)*
   $(p \Rightarrow q) \,\&\, \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
3. *Modus Tolendo Ponens*
   $(p \vee q) \,\&\, \overline{p} \Rightarrow q$
4. *Hipotetik Sillogisme*
   $(p \Rightarrow q) \,\&\, (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
5. *Aturan Eksportasi*
   $(p \,\&\, q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
6. *Aturan Importasi*
   $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \,\&\, q \Rightarrow r)$

7. *Aturan Kemustahilan*

$(p \Rightarrow q \;\&\; \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$

8. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$

9. $(\overline{p \Rightarrow q}) \Leftrightarrow p \;\&\; \overline{q}$

Contoh 4.1

1. "jika Jono lulus ujian, maka bumi berhenti berputar"

   (kalimat ini bernilai benar dan disebut premis 1)

2. "bumi tetap berputar"

   (kalimat ini bernilai benar dan disebut premis 2)

Kesimpulan : "Jono tidak lulus ujian"

Jika p menyatakan kalimat " Jono lulus ujian" dan

q menyatakan "bumi berhenti berputar',

Konklusi : ?

Secara simbolis dapat ditulis :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q\ (\text{premis}\,1/\,B) \\ \underline{\qquad \overline{q}\ (\text{premis}\,2/\,B)} \\ \overline{p} \qquad (\text{kesimpulan?}) \end{array}$$

Untuk membuktikan bahwa argumentasi tersebut absah atau tidak, gunakan tabel nilai (tabel nilai kebenaran) sebagai berikut:

Tabel 4.1

P	$\overline{p}$	Q	$\overline{q}$	$p \rightarrow q$
B	S	B	S	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	B
S	B	S	B	B

$p \rightarrow q$ yang benar adalah baris 1, 3 dan 4, sedangkan $\overline{q}$ yang benar adalah baris 2 dan 4.

$p \rightarrow q$ dan $\overline{q}$ keduanya bernilai benar adalah baris 4.

Pada baris 4 ini nilai $\overline{p}$ adalah benar.

Karena konklusinya benar (B), maka argumentasi tersebut absah (valid). Secara simbolis ditulis : $p \rightarrow q,\ \overline{q} \models \overline{p}$

Contoh 4.2

1. Premis 1 : "Jika bendera berkibar setengah tiang, maka ada pembesar meninggal dunia".
2. Premis 2 : "Bendera berkibar setengah tiang".

   Konklusi : "Ada pembesar meninggal dunia".

Jika p menyatakan "Bendera berkibar setengah tiang" dan

q menyatakan " Ada pembesar meninggal dunia".

Konklusinya ?

Secara simbolis ditulis :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ (B)} \\ \underline{p \qquad \text{(B)}} \\ \qquad q \text{ (B)} \end{array}$$

Untuk menguji apakah argumentasi tersebut valid atau tidak, kita gunakan tabel nilai sebagai berikut:

Tabel 4.2

P	Q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

$p \rightarrow q$ bernilai benar adalah pada baris 1, 3 dan 4. sedangkan p bernilai benar pada baris 1 dan 2.

Jika $p \rightarrow q$ dan sekaligus p keduanya bernilai benar adalah pada baris 1. pada baris 1 ini q bernilai benar (B).

Contoh 4.3

Akan kita selidiki argumentasi berikut:

$p \to q(B)$
$q \to r(B)$
$p \to r(B)$

Untuk menguji apakah argumentasi itu valid atau tidak, kita gunakan tabel nilai kebenaran sebagai berikut:

Tabel 4.3

P	Q	R	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	S
S	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B

$p \to q$ bernilai B adalah baris 1,2,5,6,7, dan 8.

$q \to r$ bernilai B adalah baris 1,3,4,5,7, dan 8.

$p \to q$ dan $q \to r$ keduanya bernilai B adalah pada baris 1, 5, 7, dan 8. pada baris 1, 5, 7, dan 8.

$p \to r$ semuanya bernilai B.

Dengan demikian argumentasi tersebut adalah valid, ditulis : $p \to q,\ q \to r \models q \to r$.

Aplikasi argumentasi dalam geometri antara lain:

Jika garis a sejajar b, sedangkan garis b sejajar c.

Kesimpulan : garis a sejajar c.

Untuk menentukan validitas suatu argumentasi yang terdiri dari sejumlah premis yang melibatkan *n* komponen primer diperlukan 2^n baris, sehingga cara menguji validitas suatu argumentasi dengan menggunakan tabel kebenaran menjadi tidak praktis. Berikut ini akan disajikan suatu cara yang lebih praktis, dimana cara ini banyak bertumpu pada tabel nilai dasar dan bentuk implikasi.

Contoh 4.4

Ditentukan A_1, A_2, A_3 dan A_4 dengan:

$A_1 = a \Rightarrow b \vee c$

$A_2 = b \Rightarrow \bar{a}$

$A_3 = d \Rightarrow \bar{c}$

$A_4 = a$ dan

$p \;\; = \bar{d}$

Akan diperiksa bahwa : A $\models$ P

Perlu diingat bahwa A_1, A_2, A_3 dan A_4 merupakan premis-premis bernilai benar (B), sedangkan a, b, c, d disebut "komponen premis". Dengan demikian langkah-langkah penyeleseiannya adalah:

1. Semua premis bernilai benar.
2. Karena a bernilai B (premis 4) maka $b \vee c$ (premis 1) bernilai B.
3. Karena a bernilai B, maka negasi a bernilai S, sehingga b (premis 2) bernilai S.
4. Karena b bernilai S maka c (langkah 2) bernilai B.
5. Karena c bernilai B maka negasi c pastilah bernilai S, sehingga d (premis 3) bernilai S.
6. Karena d bernilai S maka negasi d bernilai B.

Dengan demikian dikatakan argumentasinya valid. Secara simbolis ditulis dengan:

$$a \Rightarrow b \vee c, b \rightarrow \bar{a}, d \Rightarrow \bar{c}, a \models \bar{d}$$

Dari penyelesaian diatas terlihat lebih praktis daripada menggunakan tabel kebenaran, yang memerlukan banyak baris sebanyak 16 baris jika ada 4 komponen.

Akan lebih praktis dan lebih jelas lagi bilamana langkah-langkahnya dikonstruksikan dari atas ke bawah, sehingga alasan pembenaran setiap langkah dapat dilihat dengan jelas, salah satu caranya adalah sebagai berikut:

Tabel 4.4

Langkah	$a \Rightarrow b \vee c$	$b \Rightarrow \overline{a}$	$d \Rightarrow \overline{c}$	a	$\overline{d}$
1	B	B		B	
2		S			
3	B				
4	B				
5			S		
6					B

Dalam matematika seringkali kita berhadapan dengan argumentasi berikut ini: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \models P$ dimana P berupa suatu teorema, dan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ berupa aksioma atau teorema yang mendahului didalam strukturnya.

Teorema 4.1

$A \models P$ suatu argumentasi yang valid $a \rightarrow b$ suatu tautologi.

Bukti:

Jika $A \models P$ suatu argumentasi yang valid maka A dan P keduanya harus bernilai B, ini artinya $a \rightarrow b$, suatu tautologi. Demikian pula sebaliknya bila $a \Rightarrow b$ suatu tautologi maka:

Kemungkinan pertama, A dan P bernilai B hal ini berarti $A \models P$ suatu argumentasi yang valid.

Kemungkinan kedua, A dan P bernilai S dan,

Kemungkinan ketiga, A bernilai S dan P bernilai B. Kemungkinan kedua dan ketiga tidak membentuk argumentasi sebab syarat suatu argumentasi itu valid bila premis-premisnya bernilai B dan konklusinya juga bernilai B.

Perlu diketahui bahwa pada umumnya A terdiri terdiri dari beberapa premis $A = A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \models P$ ($n \geq 2$)

Teorema 4.2

$A_1, A_2, A_3, ..., A_m \models P$ suatu argumentasi yang valid <u>bhb</u>

$A_1, A_2, A_3, ..., A_{m-1}, A_m \Rightarrow P$ argumen yang valid.

Bukti :

Andaikan $A_1, A_2, A_3, ..., A_{m-1}, A_m \models P$ suatu argumentasi yang valid, maka A_1 & A_2 & ... & A_{m-1} & $A_m \Rightarrow P$ suatu tautologi. Tautologi ini akan equivalen dengan (A_1 & A_2 & ... & A_{m-1}) & $A_m \Rightarrow P$ sehingga (A_1 & A_2 & ... & $A_{1(m-1)}$) $\Rightarrow$ ($A_m \Rightarrow P$) suatu tautologi pula. Dengan demikian diperoleh $A_1, A_2, A_3, ..., A_{m-1}, A_m \models A_m \Rightarrow P$ suatu argumentasi yang valid.

Contoh 4.5

Buktikan kebenaran argumentasi berikut $a \Rightarrow (c \Rightarrow b), a \vee \overline{d}, c \models d \rightarrow b$

Bukti :

Argumentasi $a \Rightarrow (c \Rightarrow b), a \vee \overline{d}, c \models d \Rightarrow b$ ekuivalen dengan argumentasi berikut $a \Rightarrow (c \Rightarrow b), a \vee \overline{d}, c, d \models b$

Tabel 4.5

Langkah	$a \rightarrow (c \rightarrow b)$	$a \vee \overline{d}$	c	d	b
1	B	B	B	B	
2		B			
3	B				
4	B				B

Teorema 4.3

(1) $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \models A_i$ dan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ adalah suatu argumentasi yang valid.

(2) $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \models P_i$, dan $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ dan $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k \models Q$ maka $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \models Q$ suatu argumentasi yang valid.

Bukti :

(1) Karena $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ adalah premis-premis dari suatu argumentasi, maka pastilah semuanya bernilai B. Dengan demikian $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \models A_i$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ suatu argumentasi yang valid.

(2) $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \models P_i$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ adalah suatu argumentasi yang valid, ini berarti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ merupakan premis-premis yang semuanya bernilai B, demikian pula $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ semuanya bernilai B. Karena $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k \models Q$ suatu argumentasi yang valid maka $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ dan Q semuanya bernilai B. Ini berarti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m \models Q$ suatu argumentasi yang valid.

B. TIGA ATURAN

Untuk membuktikan absah atau tidaknya suatu argumentasi, dibawah ini akan ditunjukan suatu cara yang lebih praktis, di mana setiap langkah berdasarkan pada tiga aturan sebagai berikut:

(1) Aturan *p*

Suatu pernyataan (tunggal atau majemuk) yang ditetapkan sebagai premis di singkat "*p*"

(2) Aturan *t*

Dalam setiap penurunan dapat ditetapkan pernyataan Q bernilai benar, bersama pendahuluannya membentuk implikasi tautologi.

Misalkan pernyataan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sebagai pendahulu kemudian diturunkan pernyataan Q sehingga $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3 \ldots \&\, A_m \Rightarrow Q$ merupakan suatu tautologi disingkat "*t*".

(3) Aturan *cp* (*the rule of conditional proof*)

Jika Q diturunkan dari premis-premis $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ dan S Maka $S \rightarrow Q$ merupakan konklusi. Untuk lebih jelasnya : $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, S \models Q$ ekuivalen dengan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, S \models Q$.

Artinya argumentasi :

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n,\ S \to Q$ dapat diganti atau diubah dengan argumentasi: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, S \models Q$, sebab kedua argumentasi itu ekuivalen.

Aturan *cp* hanya berlaku bilamana konklusinya berbentuk implikasi dua pernyataan, bila konklusinya berbentuk disjungsi atau konjungsi itu harus di ubah menjadi bentuk implikasi dua pernyataan yang ekuivalen, Misalnya :

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n \models \bar{d} \vee \bar{c}$ ekuivalen dengan

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n \models d \Rightarrow \bar{c}$ ekuivalen juga dengan

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n, d \models \bar{c}$

Aturan ini sebenarnya aplikasi dari teorema 2.

Contoh 4.6

Dengan menggunakan aturan *p* dan *t,* buktikan keabsahan penurunan kesimpulan argumentasi berikut.

$a \Rightarrow b \vee c, b \Rightarrow \bar{a}, \bar{d} \Rightarrow \bar{c}, a \models \bar{d}$

Perlu diperhatikan bahwa langkah-langkah pembuktian ini mempunyai nilai benar (B)

Bilangan dalam kolom [1] menunjuk premis yang dipakai

Bilangan dalam kolom [2] menunjuk urutan pengerjaan

Bilangan dalam kolom [3] menunjuk formula yang bernilai benar

Bilangan dalam kolom [4] menunjuk baris yang digunakan dan aturan/tautologi yang dipakai.

Tabel 4.6

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$a \to b \vee c$	p
(2)	(2)	$b \to \overline{a}$	p
(3)	(3)	$d \to \overline{c}$	p
(4)	(4)	a	p
(4,1)	(5)	$b \vee c$	1,4t
(2,4)	(6)	$\overline{b}$	2,4t
(1,2,4)	(7)	c	5,6t
(1,2,3,4)	(8)	$\overline{d}$	3,7t

Contoh 4.7

Dengan hanya menggunakan aturan p dan t saja, buktikan keabsahan penurunan kesimpulan argumentasi berikut:

$(p \Rightarrow s) \& (q \Rightarrow t), t \& s \Rightarrow r, \overline{r} \models \overline{q} \vee \overline{p}$

Tabel 4.7

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$(p \to s) \& (q \to t)$	p
(2)	(2)	$t \& s \to r$	p
(3)	(3)	$\overline{r}$	p
(2,3)	(4)	$\overline{(t \& s)}$	2,3t
(2,3)	(5)	$\overline{t} \vee \overline{s}$	4t
(2,3)	(6)	$t \to \overline{s}$	5t
(1)	(7)	$p \to s$	1t
(1)	(8)	$\overline{s} \to \overline{p}$	7t
(1,2,3)	(9)	$t \to \overline{p}$	6,8t
(1)	(10)	$q \to t$	1t
(1,2,3)	(11)	$q \to \overline{p}$	10,9t

(1,2,3)	(12)	$\overline{q} \vee \overline{p}$	11t

Bilamana digunakan aturan *cp* maka rangkaian premis:

$(p \Rightarrow s) \& (q \Rightarrow t), t \& s \Rightarrow r, \overline{r} \models \overline{q} \vee \overline{p}$, harus diubah menjadi:

$(p \Rightarrow s) \& (q \Rightarrow t), t \& s \Rightarrow r, \overline{r} \models q \Rightarrow \overline{p}$

Argumentasi di atas ekuivalen dengan :

$(p \Rightarrow s) \& (q \Rightarrow t), t \& s \Rightarrow r, \overline{r},\ q \models \overline{p}$

Penurunan kesimpulan argumentasi dengan menggunakan aturan *cp* adalah sebagai berikut:

Tabel 4.8

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$(p \rightarrow s) \& (q \rightarrow t)$	p
(2)	(2)	$t \& s \rightarrow r$	p
(3)	(3)	$\overline{r}$	p
(4)	(4)	q	p tamb
(1)	(5)	$q \rightarrow t$	1, t
(1,4)	(6)	t	4,5, t
(2,3)	(7)	$\overline{(t \& s)}$	2,3, t
(2,3)	(8)	$\overline{t} \vee \overline{s}$	7, t
(1,2,3,4)	(9)	$\overline{s}$	6,8, t
(1)	(10)	$p \rightarrow s$	1, t
(1,2,3,4)	(11)	$\overline{p}$	9,10, t
(1,2,3)	(12)	$q \rightarrow \overline{p}$	4,11,cp
(1,2,3)	(13)	$\overline{q} \vee \overline{p}$	12, t

Pada baris (11) diperoleh bahwa $\overline{p}$ benar (B) dan ini didapat dari premis (1), (2), (3) dan premis tambahan (4) sehingga sesuai dengan aturan *cp* formula $q \Rightarrow \overline{p}$

Pada baris (12) diperoleh dari premis-premis (1), (2) dan (3) saja

Latihan 4.1

Periksalah keabsahan penurunan kesimpulan argumentasi berikut .

1. $a, a \Rightarrow (b \vee c), (b \vee c) \Rightarrow d \models d$
2. $a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, \bar{c} \models \bar{a}$
3. $a \Rightarrow b, \bar{b} \vee c, \bar{c} \vee (c \Rightarrow a), \bar{c} \models \bar{a}$
4. $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}, \bar{a} \vee c \vee d, \bar{c} \vee (p \wedge q), (p \wedge \bar{d}) \Rightarrow p \models \bar{d} \Rightarrow b$
5. $a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ d \overline{\Rightarrow} a,\ c \models b\ \overline{\&}\ d$
6. $a \Rightarrow b, c \Rightarrow d, (\bar{b} \vee \bar{d}) \wedge (a \vee \bar{b}) \models \bar{a} \vee \bar{c}$
7. $(b \vee c) \Rightarrow (d \vee p), (d \vee p \vee q) \Rightarrow (p \vee r), (p \vee r) \Rightarrow \bar{d}, p \Rightarrow \bar{d}, b \models r$
8. $a \vee b, a \Rightarrow c, b \Rightarrow d \models c \vee d$
9. $p \wedge s, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow \bar{t} \models r \,\&\, \bar{t}$
10. $p \Rightarrow (\overline{q \,\&\, r}), \bar{q} \vee \bar{r} \Rightarrow \bar{s}, t \vee s \models \bar{p} \vee t$

C. KONSISTENSI DAN BUKTI TAK LANGSUNG

1. Pengertian Inkonsisten

Konsisten atau ketaatan asas adalah tidak dibenarkannya muncul kontradiksi, lawan kata konsisten adalah tidak konsisten atau “INKONSISTEN”.

Marilah kita pandang sekumpulan, pernyataan $A_i = A_1, A_2, ..., A_n$ sekumpaulan pernyataan ini dikatakan inkonsisten bila A_1 & A_2 & A_3 ... & A_n bernilai salah (S) sebagaimana diuraikan sebelum ini, sekumpulan pernyataan ini dipandang sebagai sekumpulan premis dan dari premis – premis ini diturunkan suatu kesimpulan (konklusi). Jika dari sekumpulan premis ini tidak mencukupi untuk menghasilkan suatu kesimpulan maka sekumpulan premis ini dinamakan inkonsisten. Hal ini terjadi manakala ada diantara premis – premis itu yang bernilai salah (S).

Untuk menguji apakah sekumpulan premis itu konsisten atau inkonsisten, kita andaikan terlebih dahulu bahwa premis – premis itu semuanya bernilai benar (B), melalui langkah – langkah logis dengan aturan tertentu dapat diturunkan suatu kontradiksi, maka sekumpulan premis itu disebut inkonsisten.

Teorema 4.4

Sekumpulan pernyataan $A_i = A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ disebut inkonsisten bilamana dari sekumpulan pernyataan tersebut dapat diturunkan suatu kontradiksi.

Bukti :

Andaikan $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \models c \,\&\, \bar{c}$ merupakan suatu argumentasi yang absah maka :

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n \Rightarrow c \,\&\, \bar{c}$ adalah suatu tautologi. Padahal $c \,\&\, \bar{c}$ adalah suatu kontradiksi karena untuk setiap nilai kebenaran yang diberikan kepada c maka $c \,\&\, \bar{c}$ bernilai salah (S). Karena $c \,\&\, \bar{c}$ bernilai salah maka $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3 \ldots \&\, A_n$ harus bernilai salah. Hal ini berarti paling sedikit ada satu di antara pernyatan $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ yang bernilai salah (S). Dengan demikian sekumpulan pernyataan itu inkonsisten.

Contoh 4.8

Periksa apakah kesimpulan pernyataan di bawah ini inkonsisten atau tidak!

$a \Leftrightarrow b, b \Rightarrow c, \bar{c} \vee d, \bar{a} \Rightarrow d$

Pemeriksaan 1

Tabel 4.9

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$a \leftrightarrow b$	p
(2)	(2)	$b \rightarrow c$	p
(3)	(3)	$\bar{c} \vee d$	p
(4)	(4)	$\bar{a} \rightarrow d$	p
(5)	(5)	$\bar{d}$	p
(4,5)	(6)	a	4,5,t
(3,5)	(7)	$\bar{c}$	3,5,t
(2,3,5)	(8)	$\bar{b}$	2,7,t

(1,2,3,5)	(9)	$\bar{a}$	1,8,t
(1,2,3,4,5)	(10)	$a \& \bar{a}$	6,9,t

Pemeriksaan 2

Tabel 4.10

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$a \leftrightarrow b$	p
(2)	(2)	$b \rightarrow c$	p
(3)	(3)	$\bar{c} \vee d$	p
(4)	(4)	$\bar{a} \rightarrow d$	p
(5)	(5)	$\bar{d}$	p
(4,5)	(6)	a	4,5,t
(1,4,5)	(7)	b	1,6,t
(1,2,4,5)	(8)	c	2,7,t
(3,5)	(9)	$\bar{c}$	3,5,t
(1,2,3,4,5)	(10)	$c \& \bar{c}$	8,9,t

Hasil dari pemeriksaan 1 maupun pemeriksaan 2 diperoleh suatu kontradiksi (baris 10) yaitu $a \& \bar{a}$ dan $c \& \bar{c}$. ini berarti bahwa rangkaian : $a \Leftrightarrow b, b \Rightarrow c, \bar{c} \vee d, \bar{a} \Rightarrow d$ inkonsisten.

2. **Bukti tak langsung (*reductio ad absurdum*)**

Ilustrasi 1

Matematikawan Yunani untuk pertama kali menemukan cara baru untuk memperoleh bukti validitas suacxztu argumen, yang dalam bahasa Latin disebutnya ***reductio ad absurdum*** (reduksi ke kemustahilan). Melalui proses ini kita membuktikan berlakunya suatu premis dengan menganggap bahwa kebalikannyalah yang benar, kemudian memperlihatkan bahwa premis kebalikan tadi ditolak kebenarannya. Ia mengambil contoh tetangganya mempunyai seekor anjing, ia bermaksud memeriksa keluhan bahwa anjingnya menyalak terus – menerus. Ia memulai dengan dua premis : bahwa **semua anjing adalah binatang** dan bahwa **semua binatang harus makan dan tidur.** Dari dua premis tersebut ia mereduksikan kesimpulan bahwa **semua binatang harus makan dan tidur.** Kemudian ia mengambil lagi dua premis: bahwa **beberapa anjing harus makan dan tidur.** Kemudian ia mengambil lagi dua premis : bahwa **beberapa anjing menyalak terus menerus (**ingkaran pernyataan yang akan dibuktikan) dan bahwa **anjing yang menyalak terus menerus tidak makan atau tidur.** Dari kedua premis yang terkhir ini, ia mereduksi bahwa **beberapa anjing tidak makan ataupun tidur.** Kesimpulan ini tentu tidak masuk akal, sebab bertentangan dengan kesimpulan di muka yaitu bahwa **semua anjing harus makan dan tidur.** Setelah diperiksa kembali keempat premis itu, maka satu-satunya yang meragukan adalah bahwa **beberapa anjing menyalak terus menerus.** Karena premis tersebut menghasilkan kesimpulan yang **absurd (mustahil)**, maka kesimpulan itu harus ditolak, dan ingkarannyalah yang benar, yakni bahwa **tidak ada anjing yang menyalak terus menerus**. Dengan demikian ia telah membuktikan kebenaran yang mula-mula harus dibuktikan.

Ilustrasi 2

Premis 1 : Semua koruptor adalah penjahat (B)

Premis 2 : Andi adalah seorang koruptor (B)

Dengan menggunakan bukti tak langsung (Reductio ad absurdum), buktikan bahwa : “Andi adalah seorang penjahat” (Premis 3)

Bukti :

Andaikan bahwa : "Andi bukan seorang penjahat", kita anggap benar (premis 4). Ini berarti : ada koruptor yang bukan penjahat (premis 5). Akan tetapi premis 5 ini merupakan negasi atau ingkaran dari premis 1, yang sudah kita terima kebenarannya.

Oleh karena itu premis 5 ini bernilai salah (S). karena premis 5 bernilai salah, maka premis 4 pun bernilai salah, sebab premis 3 bernilai benar. Sehingga terbuktilah bahwa : "Andi adalah seorang penjahat"

Kesimpulan dari dua ilustrasi diatas kita dapat membuktikan bahwa suatu pernyataan bernilai benar dengan menunjukkan ingkaran dari pernyataan itu salah. Hal ini dilakukan dengan menurunkan kesimpulan yang salah dari argumen yang terdiri dari negasi atau ingkaran pernyataan-pernyataan lain yang telah kita terima kebenarannya

Teorema 4.5

Jika dari A_1, A_2, A_3, ..., A_n dan $\overline{C}$ dapat diturunkan suatu kontradiksi, maka berlakulah $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \models C$.

Bukti :

Andaikan $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, \overline{C} \models D \,\&\, \overline{D}$ untuk setiap pernyataan D adalah suatu argumentasi yang absah, maka sesuai dengan teorema yang lalu dapat ditulis A_1, A_2, $A_3, ..., A_n, \overline{C} \models D \,\&\, \overline{D}$ adalah argumen yang absah. Ini berarti $\overline{C} \models D \,\&\, \overline{D}$ bernialai B. Karena $D \,\&\, \overline{D}$ bernilai S maka $\overline{C}$ bernilai S, sehingga C bernilai B.

Teorema ini merupakan dasar untuk pembuktian tak langsung (*reductio ad absurdum*). *Reductio* artinya reduksi dan *absurd* artinya mustahil . Jadi *reductio ad absurdum* artinya reduksi kemustahilan atau sering diterjemahkan ke dalam bahasa Indonesia menjadi bukti kemustahilan . Adapun prosedur pembuktian dengan menggunakan metode tak langsung sesuai dengan teorema tersebut adalah :

1. Ingkarilah konklusinya.
   Ingkaran konklusi ini dipakai sebagai premis tambahan.
2. Dari semua premis (termasuk premis tambahan) dapat diturunkanlah suatu kontradiksi. Dengan demikian konklusi mula- mula itulah yang benar
3. Bila tidak dicapai kontradiksi maka konklusi mula – mula sebelum diingkari itulah konklusi yang benar. (Tulisan mengenai reductio ad absurdum selengkapnya dapat dibaca pada halaman 88)

Contoh 4.9

Buktikan keabsahan argumentasi berikut dengan menggunakan reductio ad absurdum

$\bar{a} \vee b, c \Rightarrow \bar{b}, \models a \Rightarrow \bar{c}$

Bukti :

Ingkarilah konklusi / kesimpulan $a \Rightarrow \bar{c}$ yaitu:

$a \Rightarrow \bar{c}$ ek a & c sehingga jumlah premisnya menjadi tiga yaitu :

1. $\bar{a} \vee b$
2. $c \to \bar{b}$
3. $a \,\&\, c$

Dari ketiga premis itu dapat diturunkan suatu kontradiksi. Dilaksanakan seperti cara yang lalu yaitu :

Tabel 4.11

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$\bar{a} \vee b$	p
(2)	(2)	$c \to \bar{b}$	p
(3)	(3)	$a \,\&\, c$	p tamb
(3)	(4)	a	3,t
(1,3)	(5)	b	1,4,t
(3)	(6)	c	3,t
(2,3)	(7)	$\bar{b}$	2,6,t
(1,2,3)	(8)	$b \,\&\, \bar{b}$	5,7,t

Pada baris (8) diperoleh kontradiksi $b \,\&\, \bar{b}$. Ini berarti bahwa rangkaian premis $\bar{a} \vee b, c \Rightarrow \bar{b}, a \,\&\, c$ inkonsisten. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa argumentasi $\bar{a} \vee b, c \Rightarrow \bar{b}, \models a \Rightarrow \bar{c}$.

Contoh 4.10

Dengan menggunakan reductio ad absurdum tunjukan keabsahan argumentasi $\overline{d} \Rightarrow a, a \Rightarrow \overline{b}, b \vee c, \overline{c} \models d$.

Kesimpulan dari argumentasi tersebut adalah *d*. andaikan kesimpulan nya $\overline{d}$, kemudian harus kita turunkan dari rangkaian premis : $\overline{d} \Rightarrow a, a \Rightarrow \overline{b}, b \vee c, \overline{c},\ \overline{d}$ hingga terjadi suatu kontradiksi. Proses penurunannya kita lakukan sebagai berikut :

Tabel 4.12

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$\overline{d} \rightarrow a$	p
(2)	(2)	$a \rightarrow \overline{b}$	p
(3)	(3)	$b \vee c$	p
(4)	(4)	$\overline{c}$	p
(5)	(5)	$\overline{d}$	p tamb
(1,5)	(6)	a	5,1,t
(1,2,5)	(7)	$\overline{b}$	2,6,t
(1,2,3,4,5)	(8)	b	3,4,t
(1,2,3,4,5)	(9)	$\overline{b} \,\&\, b$	7,8,t

Pada baris (9) diperoleh suatu kontradiksi $\overline{b} \,\&\, b$. Ini berarti bahwa kumpulan premis tersebut inkonsisten. Oleh karena itu pengandaian di atas harus diingkari. Ini berarti *d* yang merupakan kesimpulan dari rangkaian premis itu bernilai benar (B).

Jadi $\overline{d} \Rightarrow a, a \Rightarrow \overline{b}, b \vee c, \overline{c} \models d$ suatu argumentasi yang valid.

Penerapan

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ bilangan irasional.

Bukti :

Andaikan $\sqrt{2}$ bilangan rasional maka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor persekutuan. Kuadrat kedua ruas diperoleh : $2 = \frac{m^2}{n^2}$ sehingga $m^2 = 2n^2$.

Karena $2n^2$ adalah bilanga genap (kenapa?) maka m^2 juga bilangan genap, jika m^2 merupakan bilangan genap, maka m juga bilangan genap. Katakan $m = 2k(k \notin B)$ jadi $m^2 = 2n^2 = 4k^2$ sehingga diperoleh $4^2 = 2k^2$ karena $2k^2$ bilangan genap maka 4^2 juga bilangan genap. Karena n^2 bilangan genap maka n juga bilangan genap. Karena m dan n keduanya merupakan bilangan-bilangan genap, maka m dan n mempunyai faktor persekutuan 2 sehingga terjadi kontradiksi.

Oleh karena itu pengandaian bahwa akar dua adalah bilangan rasional harus diingkari. Jadi, akar dua adalah bilangan irasional.

Latihan 4.2

1. Butikan keabsahan argumentasi berikut dengan aturan p dan t saja, kemudian dengan aturan cp!
   a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), C \,\&\, D \Rightarrow E, -F \Rightarrow D \wedge A \models A \Rightarrow (B \Rightarrow F)$
   b) $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, A \vee C \models B \Rightarrow D$
   c) $A \Rightarrow (B \,\&\, C), B \vee D, (E \Rightarrow F) \Rightarrow D, B \Rightarrow E \models B \Rightarrow E$
   d) $A \Rightarrow (\overline{C \vee D}), C \wedge D \Rightarrow (\overline{D \Rightarrow E}), D \wedge E \Rightarrow F \wedge G, F \Rightarrow (G \Rightarrow H) \models A \Rightarrow H$
   e) $\overline{a} \vee b,\ c \Rightarrow \overline{b} \models a \Rightarrow \overline{c}$
   f) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c),\ c \wedge d \Rightarrow e,\ \overline{f} \Rightarrow d,\ a \Rightarrow \overline{e} \models a \Rightarrow (b \Rightarrow f)$
   g) $a \Rightarrow (b \wedge c),\ \overline{b} \vee d,\ (e \Rightarrow \overline{f}) \Rightarrow \overline{d},\ b \Rightarrow (a \Rightarrow \overline{e}) \models b \Rightarrow e$
   h) $a \vee b \Rightarrow (\overline{c \vee d}),\ \overline{c} \wedge \overline{d} \Rightarrow (\overline{d \Rightarrow \overline{e}}),\ d \wedge e \Rightarrow f \wedge g,\ f \Rightarrow (g \Rightarrow h) \models a \Rightarrow h$
2. Buktikan soal no. 1 di atas dengan menggunakan reductio ad absurdum!
3. Di antara rangkaian premis di bawah ini mana yang inkonsisten?
   a) $a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, c \wedge d \Leftrightarrow \overline{b}$
   b) $(\overline{\overline{b} \vee a}), a \vee \overline{c}, b \Rightarrow c$
   c) $(p \wedge q) \vee (r \,\&\, \overline{s}), p \Rightarrow \overline{q}, r \Rightarrow (s \vee t) \models \overline{t}$