BAB VI

BUKTI TAK LANGSUNG (*REDUCTIO AD ABSURDUM*)

Ilustrasi 1

Matematikawan Yunani untuk pertama kali menemukan cara baru untuk memperoleh bukti validitas suacxztu argumen, yang dalam bahasa Latin disebutnya ***reductio ad absurdum*** (reduksi ke kemustahilan). Melalui proses ini kita membuktikan berlakunya suatu premis dengan menganggap bahwa kebalikannyalah yang benar, kemudian memperlihatkan bahwa premis kebalikan tadi ditolak kebenarannya. Ia mengambil contoh tetangganya mempunyai seekor anjing, ia bermaksud memeriksa keluhan bahwa anjingnya menyalak terus – menerus. Ia memulai dengan dua premis : bahwa **semua anjing adalah binatang** dan bahwa **semua binatang harus makan dan tidur.** Dari dua premis tersebut ia mereduksikan kesimpulan bahwa **semua binatang harus makan dan tidur.** Kemudian ia mengambil lagi dua premis: bahwa **beberapa anjing harus makan dan tidur.** Kemudian ia mengambil lagi dua premis : bahwa **beberapa anjing menyalak terus menerus (**ingkaran pernyataan yang akan dibuktikan) dan bahwa **anjing yang menyalak terus menerus tidak makan atau tidur.** Dari kedua premis yang terkhir ini, ia mereduksi bahwa **beberapa anjing tidak makan ataupun tidur.** Kesimpulan ini tentu tidak masuk akal, sebab bertentangan dengan kesimpulan di muka yaitu bahwa **semua anjing harus makan dan tidur.** Setelah diperiksa kembali keempat premis itu, maka satu-satunya yang meragukan adalah bahwa **beberapa anjing menyalak terus menerus.** Karena premis tersebut menghasilkan kesimpulan yang **absurd (mustahil)**, maka kesimpulan itu harus ditolak, dan ingkarannyalah yang benar, yakni bahwa **tidak ada anjing yang menyalak terus menerus**. Dengan demikian ia telah membuktikan kebenaran yang mula-mula harus dibuktikan.

Ilustrasi 2

Premis 1 : Semua koruptor adalah penjahat (B)

Premis 2 : Andi adalah seorang koruptor (B)

Dengan menggunakan bukti tak langsung (Reductio ad absurdum), buktikan bahwa : “Andi adalah seorang penjahat” (Premis 3)

Bukti :

Andaikan bahwa : “Andi bukan seorang penjahat”, kita anggap benar (premis 4). Ini berarti : ada koruptor yang bukan penjahat (premis 5). Akan tetapi premis 5 ini merupakan negasi atau ingkaran dari premis 1, yang sudah kita terima kebenarannya.

Oleh karena itu premis 5 ini bernilai salah (S). karena premis 5 bernilai salah, maka premis 4 pun bernilai salah, sebab premis 3 bernilai benar. Sehingga terbuktilah bahwa : “Andi adalah seorang penjahat”

Kesimpulan dari dua ilustrasi diatas kita dapat membuktikan bahwa suatu pernyataan bernilai benar dengan menunjukkan ingkaran dari pernyataan itu salah. Hal ini dilakukan dengan menurunkan kesimpulan yang salah dari argumen yang terdiri dari negasi atau ingkaran pernyataan-pernyataan lain yang telah kita terima kebenarannya

Teorema 4.5

Jika dari A_1, A_2, A_3, ..., A_n dan $\overline{C}$ dapat diturunkan suatu kontradiksi, maka berlakulah $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \models C$.

Bukti :

Andaikan $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, \overline{C} \models D \;\&\; \overline{D}$ untuk setiap pernyataan D adalah suatu argumentasi yang absah, maka sesuai dengan teorema yang lalu dapat ditulis A_1, A_2, $A_3, ..., A_n, \overline{C} \models D \;\&\; \overline{D}$ adalah argumen yang absah. Ini berarti $\overline{C} \models D \;\&\; \overline{D}$ bernialai B. Karena $D \;\&\; \overline{D}$ bernilai S maka $\overline{C}$ bernilai S, sehingga C bernilai B.

Teorema ini merupakan dasar untuk pembuktian tak langsung (*reductio ad absurdum*). *Reductio* artinya reduksi dan *absurd* artinya mustahil . Jadi *reductio ad absurdum* artinya reduksi kemustahilan atau sering diterjemahkan ke dalam bahasa Indonesia menjadi bukti kemustahilan . Adapun prosedur pembuktian dengan menggunakan metode tak langsung sesuai dengan teorema tersebut adalah :

1. Ingkarilah konklusinya.
   Ingkaran konklusi ini dipakai sebagai premis tambahan.
2. Dari semua premis (termasuk premis tambahan) dapat diturunkanlah suatu kontradiksi. Dengan demikian konklusi mula- mula itulah yang benar

3. Bila tidak dicapai kontradiksi maka konklusi mula – mula sebelum diingkari itulah konklusi yang benar. (Tulisan mengenai reductio ad absurdum selengkapnya dapat dibaca pada halaman 88)

Contoh 4.9

Buktikan keabsahan argumentasi berikut dengan menggunakan reductio ad absurdum

$\bar{a} \vee b, c \Rightarrow \bar{b}, \models a \Rightarrow \bar{c}$

Bukti :

Ingkarilah konklusi / kesimpulan $a \Rightarrow \bar{c}$ yaitu:

$a \Rightarrow \bar{c}$ ek a & c sehingga jumlah premisnya menjadi tiga yaitu :

1. $\bar{a} \vee b$
2. $c \rightarrow \bar{b}$
3. $a \,\&\, c$

Dari ketiga premis itu dapat diturunkan suatu kontradiksi. Dilaksanakan seperti cara yang lalu yaitu :

Tabel 4.11

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$\bar{a} \vee b$	p
(2)	(2)	$c \rightarrow \bar{b}$	p
(3)	(3)	$a \,\&\, c$	p tamb
(3)	(4)	a	3,t
(1,3)	(5)	b	1,4,t
(3)	(6)	c	3,t
(2,3)	(7)	$\bar{b}$	2,6,t
(1,2,3)	(8)	$b \,\&\, \bar{b}$	5,7,t

Pada baris (8) diperoleh kontradiksi $b \& \overline{b}$. Ini berarti bahwa rangkaian premis $\overline{a} \vee b, c \Rightarrow \overline{b}, a \& c$ inkonsisten. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa argumentasi $\overline{a} \vee b, c \Rightarrow \overline{b}, \models a \Rightarrow \overline{c}$.

Contoh 4.10

Dengan menggunakan reductio ad absurdum tunjukan keabsahan argumentasi $\overline{d} \Rightarrow a, a \Rightarrow \overline{b}, b \vee c, \overline{c} \models d$.

Kesimpulan dari argumentasi tersebut adalah *d*. andaikan kesimpulan nya $\overline{d}$, kemudian harus kita turunkan dari rangkaian premis : $\overline{d} \Rightarrow a, a \Rightarrow \overline{b}, b \vee c, \overline{c}, \ \overline{d}$ hingga terjadi suatu kontradiksi. Proses penurunannya kita lakukan sebagai berikut :

Tabel 4.12

[1]	[2]	[3]	[4]
(1)	(1)	$\overline{d} \rightarrow a$	p
(2)	(2)	$a \rightarrow \overline{b}$	p
(3)	(3)	$b \vee c$	p
(4)	(4)	$\overline{c}$	p
(5)	(5)	$\overline{d}$	p tamb
(1,5)	(6)	a	5,1,t
(1,2,5)	(7)	$\overline{b}$	2,6,t
(1,2,3,4,5)	(8)	b	3,4,t
(1,2,3,4,5)	(9)	$\overline{b} \& b$	7,8,t

Pada baris (9) diperoleh suatu kontradiksi $\overline{b} \& b$. Ini berarti bahwa kumpulan premis tersebut inkonsisten. Oleh karena itu pengandaian di atas harus diingkari. Ini berarti *d* yang merupakan kesimpulan dari rangkaian premis itu bernilai benar (B).

Jadi $\overline{d} \Rightarrow a, a \Rightarrow \overline{b}, b \vee c, \overline{c} \models d$ suatu argumentasi yang valid.

Penerapan

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ bilangan irasional.

Bukti :

Andaikan $\sqrt{2}$ bilangan rasional maka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor persekutuan. Kuadrat kedua ruas diperoleh : $2 = \frac{m^2}{n^2}$ sehingga $m^2 = 2n^2$.

Karena $2n^2$ adalah bilanga genap (kenapa?) maka m^2 juga bilangan genap, jika m^2 merupakan bilangan genap, maka m juga bilangan genap. Katakan $m = 2k(k \notin B)$ jadi $m^2 = 2n^2 = 4k^2$ sehingga diperoleh $4^2 = 2k^2$ karena $2k^2$ bilangan genap maka 4^2 juga bilangan genap. Karena n^2 bilangan genap maka n juga bilangan genap. Karena m dan n keduanya merupakan bilangan-bilangan genap, maka m dan n mempunyai faktor persekutuan 2 sehingga terjadi kontradiksi.

Oleh karena itu pengandaian bahwa akar dua adalah bilangan rasional harus diingkari. Jadi, akar dua adalah bilangan irasional.

Latihan 4.2

1. Butikan keabsahan argumentasi berikut dengan aturan p dan t saja, kemudian dengan aturan cp!
   a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), C \& D \Rightarrow E, -F \Rightarrow D \wedge A \models A \Rightarrow (B \Rightarrow F)$
   b) $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, A \vee C \models B \Rightarrow D$
   c) $A \Rightarrow (B \& C), B \vee D, (E \Rightarrow F) \Rightarrow D, B \Rightarrow E \models B \Rightarrow E$
   d) $A \Rightarrow (\overline{C \vee D}), C \wedge D \Rightarrow (\overline{D \Rightarrow E}), D \wedge E \Rightarrow F \wedge G, F \Rightarrow (G \Rightarrow H) \models A \Rightarrow H$
   e) $\overline{a} \vee b,\ c \Rightarrow \overline{b} \models a \Rightarrow \overline{c}$
   f) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c),\ c \wedge d \Rightarrow e,\ \overline{f} \Rightarrow d,\ a \Rightarrow \overline{e} \models a \Rightarrow (b \Rightarrow f)$
   g) $a \Rightarrow (b \wedge c),\ \overline{b} \vee d,\ (e \Rightarrow \overline{f}) \Rightarrow \overline{d},\ b \Rightarrow (a \Rightarrow \overline{e}) \models b \Rightarrow e$
   h) $a \vee b \Rightarrow (\overline{c \vee d}),\ \overline{c} \wedge \overline{d} \Rightarrow (\overline{d \Rightarrow \overline{e}}),\ d \wedge e \Rightarrow f \wedge g,\ f \Rightarrow (g \Rightarrow h) \models a \Rightarrow h$
2. Buktikan soal no. 1 di atas dengan menggunakan reductio ad absurdum!
3. Di antara rangkaian premis di bawah ini mana yang inkonsisten?
   a) $a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, c \wedge d \Leftrightarrow \overline{b}$
   b) $(\overline{\overline{b} \vee a}), a \vee \overline{c}, b \Rightarrow c$

c) $(p \wedge q) \vee (r \,\&\, \bar{s}), p \Rightarrow \bar{q}, r \Rightarrow (s \vee t) \models \bar{t}$