BAB VII
HIMPUNAN

A. Konsep Himpunan

Pengertian himpunan dan menjadi anggota suatu himpunan merupakan konsep dasar dalam semua cabang matematika. Setiap diskusi matematika pasti menyangkut kedua pengertian ini. Dalam buku ini, kedua pengertian tersebut dianggap secara intuitif dapat ditangkap dalam arti secara spontan dapat difahami.

Secara intuitif himpunan dipandang sebagai kumpulan objek-objek yang didefinisikan secara jelas. Syarat "yang didefinisikan secara jelas" membawa konsekuensi bahwa pengertian suatu himpunan harus dapat membedakan apakah suatu objek merupakan anggota himpunan atau tidak. Sebagai contoh, kumpulan orang yang tinggi tidak merupakan suatu himpunan. Namun kumpulan orang yang tingginya lebih dari 170 cm merupakan suatu himpunan. Kumpulan seperti inilah yang disebut **" didefinisikan dengan jelas"**

Pada umumnya himpunan dilambangkan dengan huruf kapital A,B,C,D,........, sedangkan anggota-anggota suatu himpunan baik nyata maupun abstrak dilambangkan dengan huruf kecil a,b,c,d,**.........** Misalnya, x adalah anggota dari himpunan H ditulis sebagai berikut: $x \in H$

Contoh himpunan, misalnya:

1. Himpunan nama-nama negara anggota tetap DK - PBB
2. Himpunan nama-nama ibukota semua negara Asia
3. Himpunan nama-nama hari dalam satu minggu
4. Himpunan semua bilangan bulat kurang dari 30
5. Himpunan garis-garis istimewa dalam segitiga
6. Himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $x^2 - 7x + 12 = 0$
7. Himpunan manusia yang bersayap
8. Himpunan putri duyung

B. Notasi Himpunan

1. Cara pendaftaran (*Roster Method*) atau bentuk tabulasi (*Tabulan Form*)

Bila pada suatu himpunan , yang banyaknya anggota berhingga dapat disajikan dengan membuat nama-nama anggotanya, misalnya :

H = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Apabila H adalah suatu himpunan yang banyaknya anggota takberhingga cara penulisan seperti itu mustahil dapat dilakukan.Misalnya: K adalah suatu himpunan semua bilangan asli disajikan K = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Bila M adalah suatu himpunan semua bilangan bulat disajikan M = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

2. **Cara perincian (*Ruler Method*) atau notasi pembentukan himpunan (*Sort Builden Form*)**

   Cara penulisannya, dilakukan dengan menunjuk satu anggota sembarang dari semesta pembicaraannya sebagai variabel keanggotaannya. Misalnya semesta pembicaraannya (S), sedangkan variabel dari S disajikan dengan huruf x, maka notasinya diucapkan : "Himpunan x sedemikian sehingga x mempunyai sifat tertentu".

Contoh 6.1

K adalah himpunan semua bilangan real yang terletak di antara 0 dan 1. dengan notasi : K = $\{ x \mid 0 < x < 1, x \in R \}$. Tanda "$\mid$" diucapkan dimana..... atau sedemikian rupa sehingga……

3. **Cara Khusus**

   Misalnya : M = { motor si Namang , buku si Nining , tas si Nunung, laptop si Neneng }

   Perhatikan H = $\{x \mid 2x = 10\}$, maka H adalah sebuah himpunan yang mempunyai anggota yaitu 5 ditulis : H = $\{5\}$. Meskipun bilangan 5 $\in$ H tetapi tidak sama dengan H.

Latihan 6.1

1. Tulis himpunan –himpunan berikut dengan cara pendaftaran.
   a. Himpunan nama-nama bulan dalam satu tahun
   b. Himpunan semua bilangan cacah di antara 2 hingga 50
   c. Himpunan semua bilangan prima dari 2 hingga 79
   d. Himpunan bilangan asli yang memenuhi persamaan : $x^2 - 7x + 12 = 0$, x $\in$ A
2. Tulis himpunan –himpunan berikut dengan notasi pembentuk himpunan
   a. A = $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

b. B = $\{1,2,4,8,\ldots\ldots\}$

c. C = $\{1,7,17,21,\ldots\ldots\}$

d. D = $\{1,4,7,9,\ldots\ldots\}$

e. E = $\{-1,1,-1,1,\ldots\ldots\}$

f. H = $\{\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2},\ldots\ldots\}$

g. K = $\{1,-1,1,-1,\ldots\ldots\}$

3. Jika A = {x | x bilangan asli}, B = {x | x bilangan bulat}, tulis himpunan berikut dengan cara pendaftaran
   a. H = $\{x \mid x \in A \,\&\, x^2 - 2x - 8 = 0\}$
   b. K = $\{x \mid x \in B \,\&\, x^2 - 2x - 8 = 0\}$
   c. M= $\{x \mid x \in A \,\&\, x \text{ bilangan genap positif kurang dari } 13\}$
   d. N = $\{x \mid x^2 - 6x + 5 \leq 0, x \in B\}$
   e. P = $\{x \mid x^2 - 1 > 0, x \in B\}$

C. Diagram Venn – Euler

Dalam pembahasan teori himpunan semua himpunan yang ditinjau sebenarnya adalah himpunan bagian dari sebuah himpunan tertentu. Himpunan tertentu itu dikenal dengan sebutan himpunan semesta.

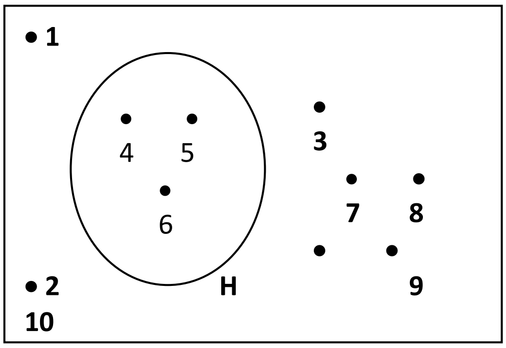
Himpunan semesta ini biasanya diberi lambang dengan huruf kapital **S** (Semesta) atau **U** (Universe of discourse) dan umumnya digambarkan dengan sebuah persegi panjang. Sedangkan himpunan bagian – bagiannya dilukiskan dengan sebuah kurva tertutup sederhana misalnya lingkaran dan ellips.

Dengan demikian, sebuah himpunan dapat disajikan dalam dua bentuk yaitu **bentuk notasi (ada tiga) dan bentuk diagram**. Diagram seperti ini disebut diagram **Venn – Euler atau diagram Venn.**

Contoh 6.2

Jika Semesta pembicaraannya adalah S = { 1 , 2 , 3 ,….. , 9 , 10 } dan H = { 4 , 5 , 6 }, maka bilamana kedua himpunan tersebut disajikan dengan diagram Venn adalah sebagai berikut :

S



Tampak terdapat tiga himpunan yaitu S, H dan {1,2,3,7,8,9,10 }

Himpunan : { 1,2,3,7,8,9,10 } ini anggota – anggotanya berada di luar H. Himpunan semacam ini disebut komplemen himpunan H dengan notasi H^c.

Latihan 6.2

1. Jika S adalah himpunan semua segiempat, A, B, C, D dan E berturut – turut adalah himpunan semua persegi, trapesium, belah ketupat, persegi panjang dan jajar genjang, tunjukkan keenam himpunan itu dengan diagram Venn
2. R adalah himpunan semua bilangan real. A, B, C, D dan Q berturut – turut adalah himpunan semua bilangan asli ; bilangan bulat, bilangan cacah, bilangan pecah dan bilangan rasional. Jika P adalah himpunan semua bilangan irasional, tunjukkan A, B, C, D, Q, P, dan R dalam diagram Venn

D. Hubungan Dua Himpunan

1. Himpunan Bagian (*Subset*)

Definisi 6.1: Himpunan H dikatakan menjadi himpunan bagian (***Subset***) dari himpunan K dengan notasi $H \subset K$ <u>bhb</u> setiap anggota dari H menjadi anggota dari K.

Secara simbolis ditulis :

Berdasarkan definisi tersebut, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa setiap himpunan sebarang H adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri

Contoh 6.3

1. Himpunan H = { 1,2,3 } adalah himpunan bagian dari himpunan K = { 1,2,3,4 } ditulis : H $\subset$ K
2. Himpunan M = { 1,3,5 } adalah himpunan bagian dari N = { 5,3,1} dan ditulis : M $\subset$ N

Catatan *:*

Ada penulis yang membedakan antara himpunan bagian dan himpunan bagian sejati. Secara singkat dikatakan bahwa :

a. H dikatakan himpunan bagian sejati dari himpunan K dengan notasi $H \subset K$, jika : H $\subset$ K dan H $\neq$ K

b. H disebut himpunan bagian dari himpunan K dengan notasi H $\subseteq$ K jika H $\subset$ K dan H = K

Dalam hal ini kita tidak membedakan kedua istilah itu dan tetap menggunakan notasi terdahulu yaitu " H $\subset$ K ".

2. Kesamaan Dua Himpunan

Definisi 6.2: Dua himpunan H dan K dikatakan sama dengan notasi H = K <u>bhb</u> setiap anggota H adalah anggota K. Dengan notasi :

H = K <u>bhb</u> $\forall x(x \in H \Leftrightarrow x \in K)$

Secara singkat :

Dua himpunan H dan K dikatakan sama dengan notasi :

H = K <u>bhb</u> H $\subset$ K dan K $\subset$ H

Misalnya : H = { 1,2,3 } dan K = { 3,2,1 }

3. Dua Himpunan Ekuivalen

Definisi 6.3: Dua himpunan H dan K dikatakan ekiuvalen dengan notasi H $\sim$ K <u>*bhb*</u> banyaknya anggota H dengan notasi n (H) sama dengan banyaknya anggota K dengan notasi n(K)

Dengan notasi ditulis :

H $\sim$ K <u>bhb</u> n (H) = n (K)

Contoh 6.4

Diketahui : H = { 1,2,3,4 }, K = { a,b,c,d }. Karena n (H) = n (K) = 4 maka dikatakan bahwa H $\sim$ K

4. Himpunan Kosong

Pengertian

Himpunan kosong dengan notasi ϕ atau { } dimaksudkan adalah suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota. Misalnya, himpunan putri duyung, himpunan manusia yang bersayap. Himpunan ini tidak ada anggotanya sebab sampai kapan pun yang namanya putri duyung dan manusia bersayap tidak akan dijumpai. Dalam aljabar contoh himpunan kosong misalnya :

$H = \{x / x^2 = 4 \text{ dan } 2x = 10, x \in R\}$

Definisi 6.4: Himpunan kosong dengan notasi**:**

$$\{\ \} = \phi = df.\ \{ x \mid x \neq x \}$$

Perlu kiranya dijelaskan bahwa ada perbedaan antara ϕ, {0} dan {ϕ}.

(1) ϕ adalah suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota baik nyata ataupun abstrak.

Contoh :

a. Himpunan bilangan real yang memenuhi persamaan $x^2 - 2x + 5 = 0$

b. Himpunan bilangan asli yang kuadratnya sama dengan 2

c. Himpunan manusia yang kepalanya tiga

(2) {0} adalah suatu himpunan yang mempunyai anggota tunggal yaitu bilangan nol.

Contoh: $M = \{x \mid x + 8 = 8, x \in R\}$

(3) {ϕ} adalah suatu himpunan yang mempunyai anggota tunggal yaitu himpunan kosong. Dengan demikian himpunan bagiannya adalah ϕ dan {ϕ}.

Teorema 6.1

Dua himpunan kosong ϕ_1 dan ϕ_2 adalah sama.

Bukti :

$x \in \phi_1 \Rightarrow x \in \phi_2$. Implikasi ini bernilai B karena antesedennya bernila S, karena himpunan kosong tidak mempunyai anggota demikian pula sebaliknya: $x \in \phi_2 \Rightarrow x \in \phi_1$, implikasi ini pun bernilai B karena antesedennya bernilai salah (S) . Menurut definisi $\phi_1 = \phi_2$

Teorema 6.2

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan

Bukti 1 :

Ambillah sebarang himpunan H. andaikan ϕ bukan himpunan bagian dari H, maka pastilah terdapat x dimana $x \in \phi$ dan $x \notin H$. Kalimat terakhir bernilai S (salah), hal ini disebabkan ϕ tidak mempunyai anggota. Oleh karena itu pengandaian bahwa ϕ bukan himpunan bagian dari H harus diingkari. Ini berarti $\phi \subset H$. Karena H adalah sebarang himpunan, maka ϕ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan.

Bukti 2 :

Untuk dapat menyimpulkan bahwa $\phi \subset H$ harus dibuktikan terlebih dahulu pernyataan: $x \in \phi \Rightarrow x \in H$. Implikasi ini bermula benar, karena anteseden dari implikasi itu bernilai salah.

Contoh 6.5

Tentukan himpunan bagian dari himpunan

a) $H = \{0\}$

b) $K = \{0,1\}$

Penyelesaian

Himpunan bagian dari

a) H = {0} adalah : ϕ, {0}

b) K = {0,1} adalah : ϕ, {0}, {1}, {0,1}

5. **Himpunan Kuasa**

Definisi 6.5: Himpunan kuasa (***power set)*** dari himpunan H dengan notasi 2^H adalah himpunan semua himpunan bagian dari H.

Contoh 6.6

Jika $H = \{a,b,c\}$ maka

$$2^H = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a.b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Jadi, $n(2^H) : 8 = 2^3$

Teorema 6.3

Jika H terdiri dari n anggota, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa dari 2^H sama dengan 2^n.

Bukti :

Himpunan kuasa 2^H terdiri :

(1) Himpunan kosong (ϕ), banyaknya $C_n^0 = 1$

(2) Himpunan-himpunan bagian yang terdiri atas satu anggota, banyaknya C_n^1

(3) Himpunan-himpunan bagian yang terdiri atas dua anggota, banyaknya C_n^2

(4) Himpunan-himpinan bagian yang terdiri atas tiga anggota, banyaknya C_n^3 dan seterusnya, akhirnya :

(5) Himpunan bagian yang terdiri atas n anggota, banyaknya C_n^n

Dengan demikian banyaknya anggota **:**

$$2^H = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Latihan 6.3

1. Tentukan himpunan bagian dari himpunan-himpunan
   a. {0}
   b. { }
2. Andaikan $H = [1, \{2,3\}, 4,5]$, maka manakah dari pernyataan berikut yang benar?
   a. 3 ∈ H
   b. {2, 3} ⊂ H
   c. n (H) = 3
   d. {{2, 3}} ⊂ H
3. Carilah himpunan kuasa 2^H jika
   a. H = {1, {2, 3}, 4}
   b. H = {{1, 2, 3}}
4. Andaikan H suatu himpunan yang bukan himpunan kosong, pernyataan yang benar dari pernyataan-pernyataan berikut adalah
   a. H ∈ 2^H
   b. H ⊂ 2^H
   c. {H} ∈ 2^H
   d. {H} ⊂ 2^H
5. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut
   a. {5} ∈ {{5}}
   b. {5} ⊂ {{5}}
   c. ϕ ∈ {5}
   d. ϕ ∈ ϕ
   e. ϕ ⊂ ϕ
6. Jika ϕ merupakan himpunan kosong, maka pilih manakah yang salah
   a. ϕ ⊂ ϕ

b. $\phi \subset \{ \phi \}$

c. $\phi \in \phi$

d. $\phi \in \{ \phi \}$