BAB IX
RELASI

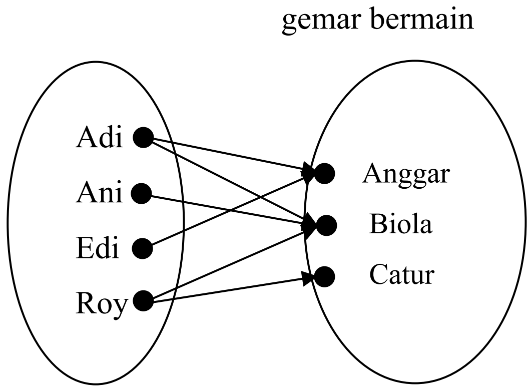
1. Relasi Antara Anggota-anggota Dua Himpunan

   Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan atau perkawanan atau korespondensi anggota-anggota A dengan anggota B.

   Perhatikan dua himpunan :

   a). Himpunan orang : A = { Adi, Ani, Edi, Roy}

   b). Himpunan permainan : B = {Anggar, Biola, Catur}



Gambar 7.1

   Gambar 7.1 Menunjukkan suatu relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B yaitu relasi “gemar bermain”.

2. Relasi Sebagai Himpunan Pasangan Terurut

   Seperti diuraikan pada bab VI semua pasangan terurut (*a,b*) dimana $a \in$ A dan b $\in$ B disebut himpunan perkalian A dan B. Ditulis: A $\times$ B = {(Adi, Anggar), (Adi, Biola), Adi, Catur), ... , (Roy, Biola)}. Jika banyaknya anggota A sama dengan *m* dan banyaknya anggota B sama dengan *n*, maka banyaknya anggota himpunan A $\times$ B sama dengan $(m \times n)$.

   Andaikan ditentukan $x \in$ A dan $y \in$ B dan andaikan pula bahwa kalimat terbuka “*x* gemar bermain *y*” dinyatakan dengan ungkapan P(*x,y*), maka penggantian *x* dengan Adi dan *y* dengan Biola yaitu P(Adi, Biola) bernilai benar. Sebaliknya, penggantian *x* dengan Adi dan *y* dengan Catur yaitu P(Adi, Catur) bernilai salah (Gambar 7.1).

Himpunan semua pasangan terurut (x,y) yang menghasilkan relasi "gemar bermain" yang bernilai benar adalah :

{(Adi, Anggar), (Adi, Biola), (Ani,Biola), (Edy, Anggar), (Roy, Biola), (Roy, Catur)}

himpunan semua terurut tersebut merupakan himpunan bagian dari A $\times$ B.

Andaikan relasi R dari A ke B ditentukan dengan R = (A,B, P(x,y)), dengan $a \in \mathrm{A}$ dan $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$.

Apabila

1. P(a,b) bernilai benar ditulis aRb (diucapkan "a berelasi dengan b")
2. P(a,b) bernilai salah ditulis $a\overline{R}b$ (diucapkan "a tidak berelasi dengan b")

Contoh 7.1

Andaikan R = {H, H, P(x,y)} dimana H adalah himpunan bilangan-bilangan asli lebih dari 1 dan P(x,y) berbunyi :

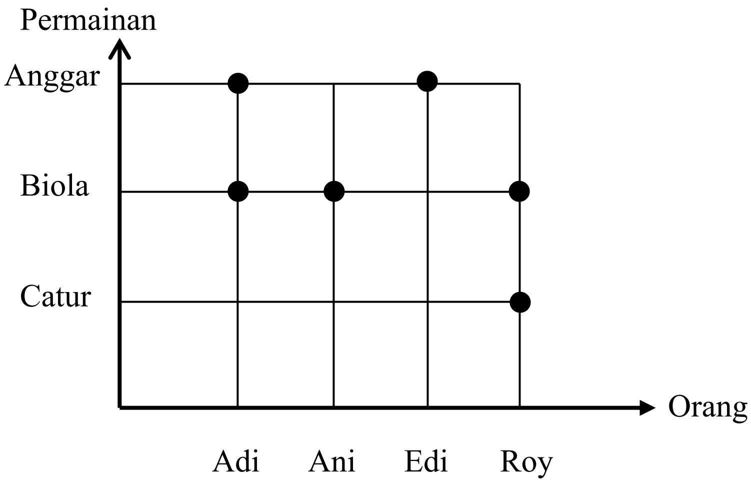
"y kelipatan x" maka :

2R6, 3R15, 5R20, 3$\overline{\mathrm{R}}$14, 5$\overline{\mathrm{R}}$21

3. Himpunan Jawab dan Grafik Relasi

Perhatikan relasi:

R = {(a,b), $a \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}, \mathrm{P(a,b)}$benar} maka R disebut himpunan jawab suatu relasi dari A ke B. Adapun grafik relasi R pada bidang koordinat Kartesius ditunjukkan sebagai noktah-noktah atau titik-titik seperti pada Gambar 7.2.



Gambar 7.2

4. Relasi Invers

Setiap relasi R dari himpunan A ke himpunan B mempunyai suatu invers R^{-1} dari B ke A yang didefinisikan :

$$R^{-1} = \{(b,a) | a,b \in R\}$$

Contoh 7.2

Ditentukan A = {a,b,c} dan B = {1,2} dan relasi R = {(a,1), (b,2), (c,1)}, maka R^{-1} = {(1,a), (2,b), (1,c)}.

5. Relasi Refleksif

   Definisi 7.1: Relasi R disebut refleksif bhb untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a,a) \in R$.

   Secara singkat ditulis:

   R refleksif bhb $(\forall\ a \in A)\ aRa$

Contoh 7.3

Diketahui A = {1,2,3} dan R = {(1,1), (2,2), (3,3)} maka R adalah relasi relaksasi refleksif. Dalam kehidupan sehari-hari, relasimencintai orang-orang adalah relasi refleksif, sebab setiap orang pasti mencintai diri sendiri. Sebaliknya, relasi R disebut relasi irrefleksif atau tidak refleksif bila ada (terdapat) paling sedikit ada satu anggota $a \in A$ dimana $(a,a) \notin R$. Secara singkat ditulis:

R disebut irreflektif bhb $(\exists a \in A).a\overline{R}a$. Katakan: A = {1,2,3} dan R = {(1,1),(1,2), (2,3), (3,3), (4,4)}, maka R bukan relasi refleksif, karena (2,2) tidak berada dalam R.

6. Relasi Simetris

   Definisi 7.2: Suatu relasi R disebut simetris bhb untuk setiap $a \in A$, berlaku

   $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$.

   Secara singkat ditulis:

   R simetris bhb $(\forall a,b).a\overline{R}b \Rightarrow b\overline{R}a$.

   Atau

   R simetris bhb $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

Contoh 7.4

Ditentukan A = {1,2,3} dan R = {(*a,b*), (*c,d*), (*b,d*), (*b,a*), (*d,c*),(*d,b*)}, maka R adalah suatu relasi simetris. Sebaliknya apabila relasi R disebut tidak simetris atau non simetris atau a-simetris bhb terdapat sekurang-kurangnya sepasang $(a,b).a\mathrm{R}b \Rightarrow b\overline{\mathrm{R}}a$ atau R diseut a-simetris bhb $(\exists a,b).a\mathrm{R}b \Rightarrow b\overline{\mathrm{R}}a$.

Contoh 7.5

Diketahui A = {*a,b,c,d*} dan R = {(*a,b), (a,c*), (*c,d*), (*a,d*), (*b,a)*, (*d,c*), (*c,a*)}, adalah relasi a-simetris sebab $(a,d) \in \mathrm{R}$ tetapi $(d,a) \in \mathrm{R}$.

7. Relasi Transitif

Definisi 7.3: Relasi R dalam himpunan A disebut transitif bhb untuk setiap triple *a,b,c* berlaku apabila *a*R*b* dan *b*R*c* maka *a*R*c*. Secara singkat ditulis R disebut transitif bhb $(\forall a,b,c).a\mathrm{R}b \,\&\, b\mathrm{R}c \Rightarrow a\mathrm{R}c$

Contoh 7.6

Diketahui A = {1,2,3}. Andaikan R_1 = {(1,2), (3,1), (3,2), (2,3)} dan R_2 = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,1), (2,1)}, maka R_1 bukan relasi transitif sebab (1,2) $\in R_1$ tetapi (1,3) $\notin R_1$.

8. Relasi Ekuivalen

Definisi 7.4: Relasi R dalam himpunan A disebut ekuivalen yang sekaligus memiliki sifat-sifat reflektif, simetri dan transitif disebut relasi ekuivalen.