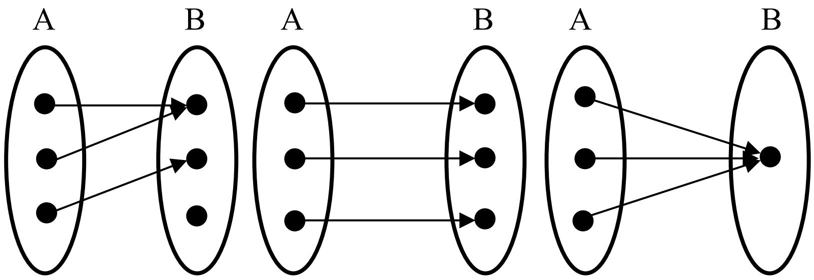
BAB X
FUNGSI ATAU PEMETAAN

1. Konsep Fungsi

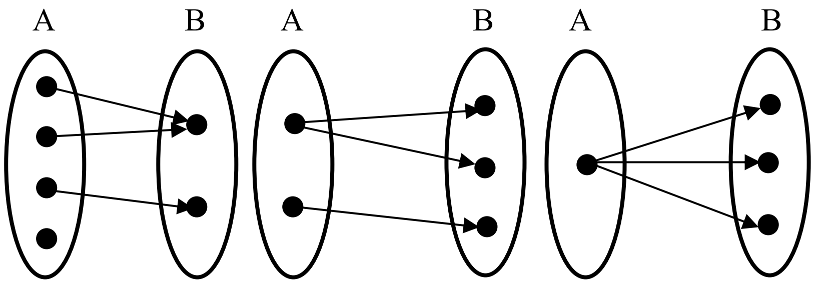
   Definisi 7.5: Suatu fungsi atau pemetaan (mapping) dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khas yaitu suatu relasi yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

   Kata "setiap" dikandung maksud bahwa semua anggota A harus mempunyai kawan di B. Hal ini dapat ditunjukkan pada Gambar 7.3.



Gambar 7.3

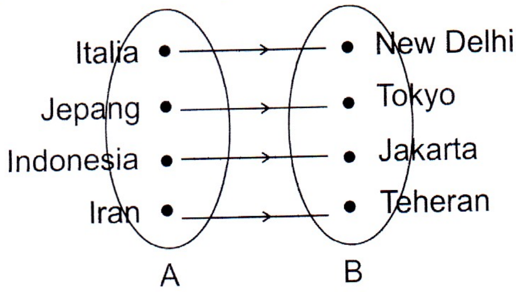
Gambar 7.4 merupakan contoh relasi yg bukan merupakan suatu fungsi



Gambar 7.4

2. Korespondensi satu-satu

   Dua himpunan A dan B dikatakan dalam keadaaan berkorespondensi satu-satu jika anggota-anggota A dan B dapat dikawankan sedemikian hingga setiap anggota A berpasangan dengan satu anggota B dan setiap anggota B berpasangan dengan satu anggota A. Jika antara dua himpunan dapat diadakan korespondensi satu-satu, maka dua himpunan itu disebut ekuivalen atau ekuipoten.



Gambar 7.5

Contoh 7.8

A = himpunan Negara-negara di Asia dan

B = himpunan ibu kota Negara-negara di Asia

Sebab tidak mungkin ada Negara mempunyai lebih dari satu ibukota dan tidak mungkin ada satu ibukota dimiliki oleh lebih dari sat Negara dan mustahil ada ibukota/Negara yang tidka mempunyai Negara/ibukota.

3. Notasi Fungsi

Andaikan A dan B adalah dua himpunan bukan himpunan kosong. Suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dengan tepat satu anggota dari himpunan B diberi lambang *f* maka dikatakan bahwa *f* adalah suatu fungsi dari A ke B dan diberi notasi :

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

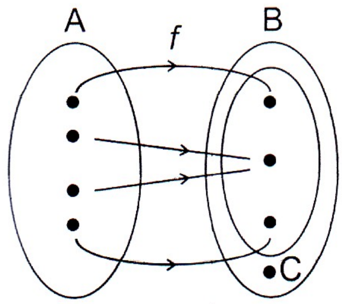
Diucapkan "fungsi *f* dari A ke B".

$f(x)$ disebut juga nilai fungsi *f* untuk *x*.

Himpunan A disebut daerah asal atau daerah definisi atau ranah atau domain dari *f* dan B disebut daerah kawan atau co-domain dari *f*.

Jika suatu fungsi f yang memetakan setiap anggota $x \in \mathrm{A}$ ke anggota $y \in \mathrm{B}$ disajikan dengan notasi $f : x \rightarrow y$. Diucapkan "*f* memetakan *x* ke *y*".

y disebut peta atau bayangan (image) dari *x* oleh *f* dan ditulis $y = f(x)$. Himpunan semua anggota B yang merupakan peta dari semua anggota A disebut daerah hasil atau jelajah (range) dari fungsi *f*.



Gb. 7.6

Pada Gambar 7.6

a. Himpunan A disebut daerah asal (domain)

b. Himpunan B disebut daerah kawan (co-domain)

c. C disebut range dengan notasi f(A)

Contoh 7.9

Fungsi $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ didefinisikan dengan rumus $f(x) = 2x^2 - 3$

Tentukan :

a. Peta 3 oleh f

b. Nilai f untuk $x = 5$

c. Bilangan k sehingga $f(k) = 15$

Jawab.

a. $f(3) = 2(3)^2 - 3 = 15$

b. $f(-5) = 2(-5)^2 - 3 = 47$

c. $f(k) = 2k^2 - 3 = 15$

$\Leftrightarrow 2k^2 = 18$

$\Leftrightarrow k = \pm 3$

Contoh 7.10

Fungsi $g : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ ditentukan oleh rumus

$g(x) = ax + b; a, b \in \mathrm{B}$, jika $g(2) = 8$ dan $g(4) = 14$, tentukan a dan b!

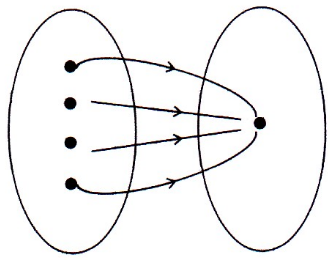
Jawab.

$$\begin{array}{l} g(2) = 2a + b = 8 \\ \underline{g(4) = 4a + b = 14} \\ \qquad\quad -2a = -6 \\ \qquad \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = 2 \end{array}$$

4. Fungsi Khusus

a. Fungsi Konstan

Fungsi $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$disebut fungsi konstan jika range dari f hanya terdiri dari satu anggota (perhatikan Gambar 7.7).



Gb. 7.7

b. Fungsi Identitas

Fungsi $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x$, yaitu f memasangkan setiap anggota dari daerah asal dengan dirinya sendiri, maka f disebut fungsi identitas pada A dengan notasi I atau IA.

c. Fungsi Modulus

Fungsi modulus A ditentukan oleh $f(x) = |x|$ memasangkan setiap bilangan real dengan nilai mutlaknya.

d. Fungsi Tangga

Fungsi tangga didefinisikan oleh rumus yang berbeda dengan daerah definisi yang berbeda disebut fungsi tangga. Misalnya:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } 0 \le x < 1 \\ 3 \text{ jika } 1 \le x < 4 \\ 5 \text{ jika } 4 \le x < 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 \text{ jika } x < 0 \\ 2x + 1 \text{ jika } \mathrm{x} \ge 0 \end{cases}$$

5. Fungsi Surjektif, Injektif, dan Bijektif

a. Fungsi Surjektif

Pada fungsi $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ tidak menuntut syarat menghabiskan himpunan B artinya mungkin saja ada $b \in \mathrm{B}$ yang tidak mempunyai mitra di A. Bilamana B habis artinya setiap $b \in \mathrm{B}$ sekurang-kurangnya mempunyai satu mitra (kawan) di A maka f disebut Surjektif.

Definisi7.6: Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif, jika setiap anggota dari daerah kawan (*codomain*) adalah peta (bayangan) dari sekurang-kurangnya satu anggota A. ini berarti daerah kawan sama dengan daerah hasil (*range*).

Dengan notasi ditulis.

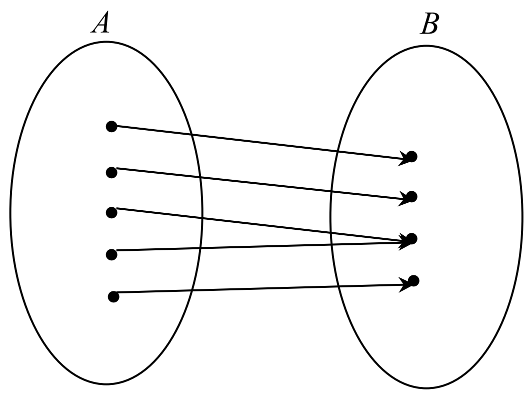
$f : A \rightarrow B$ surjektif

<u>bhb</u> $(\forall b \in B).(\exists a \in A).f(a) = b$ atau

<u>bhb</u> $(\forall b \in B).f^{-1}(b). \neq \phi$ atau

<u>bhb</u> $f(A) = B$

Fungsi surjektif disebut juga "fungsi pada" atau "fungsi onto". Disajikan dengan diagram panah adalah sebagai berikut:



Gambar 7.8

b. Fungsi injektif

Definisi 7.7: Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (satu-satu) jika setiap anggota yang berbeda dalam daerah asal mempunyai peta yang berbeda pula dalam daerah kawan. Ini berarti jika $\forall b \in f(A), f^{-1}(b)$ merupakan singleton

Catatan:

1. Suatu himpunan yang hanya mempunyai satu anggota (anggota tunggal) disebut himpunan singleton.
2. Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota sama sekali disebut himpunan renon ataupun kosong.

Dengan notasi ditulis:

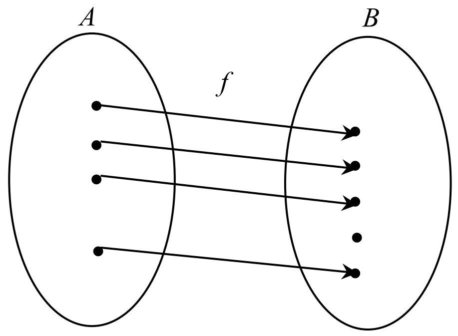
Fungsi $f : A \to B$ disebut injektif (satu-satu)

<u>bhb</u> $(\forall a_1, a_2 \in A), a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ atau

<u>bhb</u> $(\forall a_1, a_2 \in A), f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

<u>bhb</u> $f^{-1}(b)$ merupakan himpunan singleton

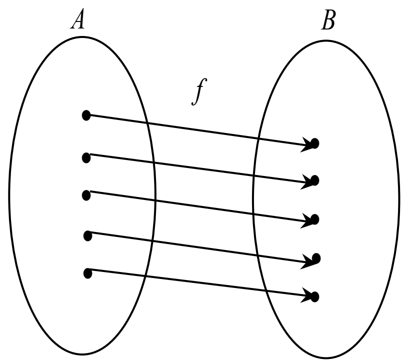
Dinyatakan dengan panah adalah sebagai berikut:



Gambar 7.9

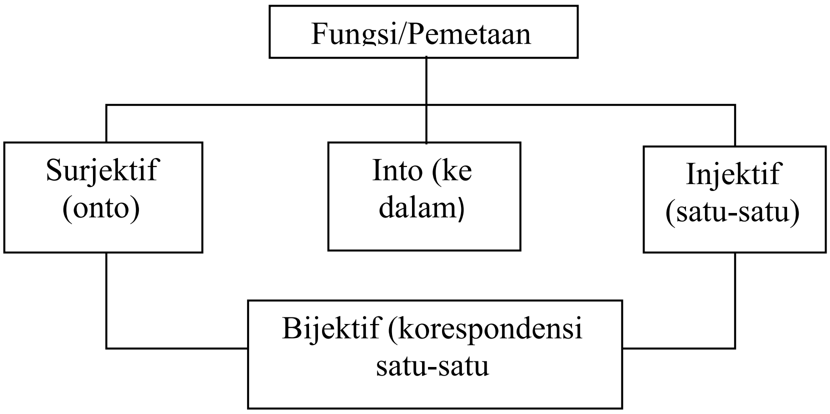
c. Fungsi Bijektif

Definisi 7.8: Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi bijektif bhb f sekaligus surjektif dan injektif. Fungsi bijektif disebut juga fungsi korespondensi satu-satu antara anggota-anggota A dengan anggota-anggota B dengan sebagian panah tampak seperti Gambar 7.10



Gambar 7.10

Secara skematis ketiga fungsi tersebut digambarkan sebagai berikut:



Skema 7.1

6. Komposisi fungsi-fungsi

   Andaikan fungsi-fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$, maka bagi fungsi f, B adalah *co-domain*, akan tetapi bagi fungsi g, B merupakan domain.

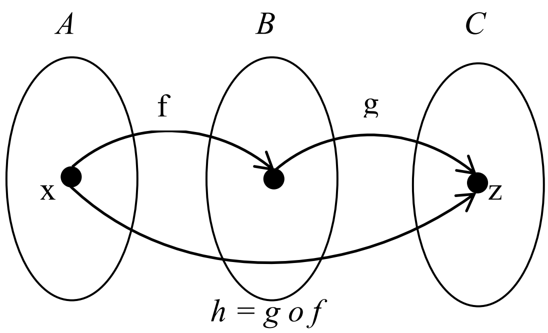
   Jika $a \in A$, maka oleh f, peta a di B adalah $f(a)$. Karena B adalah domain dari fungsi g, maka oleh f, peta $f(a) \in B$ adalah $g(f(a)) \in C$. Dengan demikian, terjadi fungsi baru yaitu:

   $$h : A \to C$$

   Yang memetakan setiap $a \in A$ langsung ke $g(f(a)) \in C$. Fungsi h disebut komposisi f dan g dengan notasi $g \circ f$ (dibaca g bundaran f) atau $gf \circ h$ ditentukan dengan terlebih dahulu mengerjakan f kemudian g.

   Untuk menentukan rumus komposisi fungsi-fungsi, kita andaikan fungsi:

   $f : A \to B$ dan $g : B \to C$, (lihat Gambar 7.11)



Gambar 7.11

Dengan mengerjakan *f* terlebih dahulu kemudian *g*, maka *f* memetakan $x \in \mathrm{A}$ ke $y \in \mathrm{B}$ dan *g* memetakan $y \in \mathrm{B}$ ke $z \in \mathrm{C}$.

Karena $y = f(x)$ dan $z = g(y) = g(f(x))$, maka $h : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ ditentukan oleh rumus: $h(x) = g(f(x))$ diucapkan *gfx* atau $h = g \circ f = gf$.

Contoh 7.11

Fungsi $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dan $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ditentukan oleh $g(x) = 1 - 3x$ dan $h(x) = x^2 - 1$. Jika $(h \circ g)(x) = 3$, carilah nilai *x*.

Jawab :

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = 3$

$\Leftrightarrow h(1-3x) = 3$

$\Leftrightarrow (1-3x)^2 - 1 = 3$

$\Leftrightarrow 1 - 6x + 9x^2 - 1 = 3$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 1$

Contoh 7.12

Diketahui $f : R \to R$ ditentukan oleh

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}, x \neq 1$$

Carilah: (i) $f^2(x)$ (ii) $f^3(x)$

Jawab:

(i) $$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{1-x-1-x} = -\frac{1}{x}$$

(ii) $f^3(x) = f\left(f^2(x)\right) = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{f(x)}$

Contoh 7.13

Suatu fungsi $f : R \to R$ didefinisikan oleh:

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq -1$

Tentukanlah :

(i) $f^2(x)$

(ii) $f^3(x)$

Jawab

(i) $f^2(x) = ff(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{x}{1x+1}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

(ii) $f^3(x) = f\left(f^2(x)\right) = f\left(\dfrac{x}{2x+1}\right) = \dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1} = \dfrac{x}{3x+1}$

Contoh 7.14

Ditentukan $f(x) = x^2 + 1$ dan $g \circ f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$

Carilah fungsi g

Jawab :

$g \circ f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$

$g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 - 1 + 9 = (x^2 + 1)^2 + 8$

Katakan $x^2 + 1 = y$

$g(y) = y^2 + 1$

Sehingga $g(x) = x^2 + 8$

Latihan 7.2

1. Fungsi-fungsi f dan g didefinisikan oleh $f : x \to ax + 2$ dan $g : x \to bx + 3$. Jika $fg = gf$ carilah hubungan antara a dan b.

2. Fungsi $f : a \to \dfrac{1+a}{1-a}$. Carilah:

   (i) $f^{\frac{5}{a}}$ (iii) $f^{\frac{7}{a}}$

   (ii) $f^{\frac{6}{a}}$ (iv) $f^{\frac{8}{a}}$

3. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^2 + 2x + 7$. Carilah $g(x)$!

4. Jika $f(x) = x^2 + 1$ dan $gf(x) = x^4 + 2x^7 + 9$. Carilah $g(x)$!

5. Jika $g(x) = x - 6$ dan $hg(x) = x^2 - 12x + 4$. Tentukan $(h \circ g)(x)$!

6. Fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, x \neq 1$. Carilah:

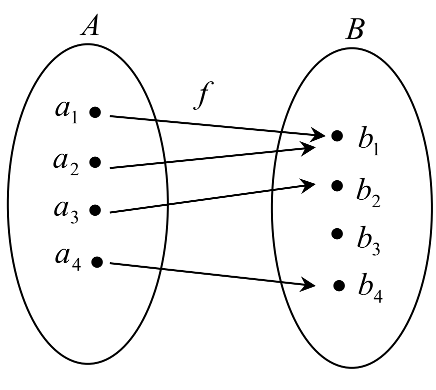
   (i) $f^5(a)$ (iii) $f^7(a)$

   (ii) $f^6(a)$ (iv) $f^8(a)$

7. Fungsi Invers

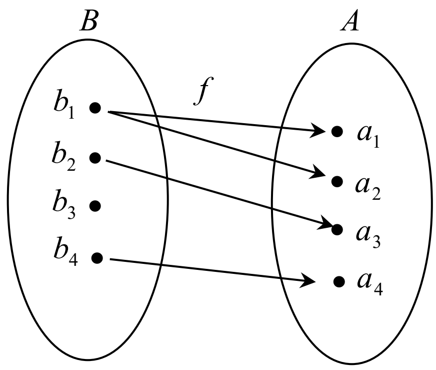
   Sebagaimana disebutkan di depan bahwa setiap fungsi adalah suatu relasi dan setiap relasi mempunyai invers. Tetapi invers suatu fungsi belum tentu merupakan suatu fungsi. Jika invers suatu fungsi berupa fungsi, maka invers fungsi itu disebut fungsi invers. Hal ini terjadi jika fungsi semula adalah fungsi bijektif.

   Perhatikan $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$



Gambar 7.12

Sekarang relasinya kita balik



Gambar 7.13

Tampak bahwa relasi baru bukanlah suatu fungsi, karena $b \in$ B mempunyai dua peta yaitu $a_1 \in$ A dan $a_2 \in$ B. Sementara $b_3 \in$ B, tidak mempunyai peta di A.

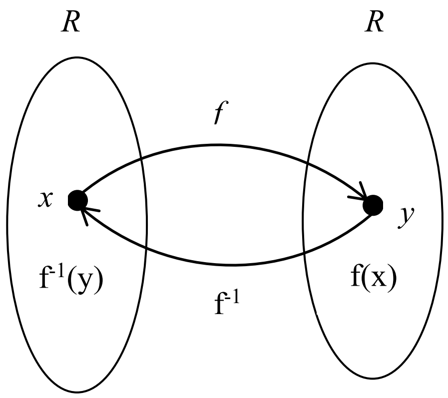
Definisi 7.9: Suatu fungsi $f : \text{A} \to \text{B}$ mempunyai fungsi invers $g : \text{B} \to \text{A}$, jika setiap anggota B adalah tepat satu anggota dari A, yaitu jika A dan B ada dalam korespondensi satu-satu. Jika g ada, maka dinyatakan dengan f^{-1}(dibaca: f invers). Daerah hasil dari f adalah daerah asal dari f^{-1} dan daerah asal dari f adalah daerah hasil dari f^{-1}.

8. Mencari Rumus untuk Fungsi Invers

Jika f dan f^{-1} merupakan fungsi-fungsi invers maka :

$f(x) = y$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ (lihat Gambar 7.14)



Gambar 7.14

Tampak bahwa $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut:

Andaikan $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = 3x - 5$.

Oleh f maka $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = y$$
$$\Leftrightarrow 3x = y + 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y+5)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y+5)$$

Andaikan fungsi $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ didefinisikan oleh $f(x) = \frac{1}{3}(y+5)$, maka:

$$\Leftrightarrow y = \frac{x-2}{x+3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2+3y}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{2+3y}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2+3x}{1-x}$$