

Contoh Soal bertipe Pemodelan Matematika dan Penyelesaiannya

Oleh: Dr.rer.nat. Adi Nur Cahyono, M.Pd.

1. Berat badan

Soal: Seorang anak dan ibunya ditimbang secara bersamaan menunjukkan berat 73 kg. Anak tersebut dan ayahnya ditimbang secara bersamaan menunjukkan berat 91 kg. Ayah dan ibu dari anak tersebut ditimbang secara bersamaan menunjukkan berat 122 kg. Berapa berat badan ketiga orang tersebut jika ditimbang secara bersamaan?

Penyelesaian:

Penyelesaian soal tentang berat badan ini diawali dengan pengidentifikasian dan pendefinisian.

No	Pengidentifikasian	Pendefinisian
1	Variabel yang terlibat : Berat (kg). a. Berat badan anak b. Berat badan ibu c. Berat badan ayah	Variabel matematika: Tulis A : Berat badan anak B : Berat badan ibu C : Berat badan ayah
2	Hal-hal yang diketahui/diberikan dalam soal: a. Berat badan anak dan ibu adalah 73 kg b. Berat badan anak dan ayah adalah 91 kg c. Berat badan ayah dan ibu adalah 122 kg	Sistem persamaan matematika: (1) $A + B = 73$ (2) $A + C = 91$ (3) $B + C = 122$
3	Tujuan: Berat total ketiga orang.	$A + B + C = \dots$

Selanjutnya dilakukan proses penyelesaian sistem persamaan matematika:

Persamaan (2) dikurangi persamaan (1) diperoleh $C - B = 18 \dots(4)$.

Persamaan (4) ditambah persamaan (3) diperoleh $2C = 140$ menghasilkan $C = 70$.

Jadi diperoleh $A = 91 - 70 = 21$ dan $B = 73 - 21 = 52$.

Jadi $A + B + C = 21 + 52 + 70 = 143$

Tahap akhir dari proses penyelesaian ini adalah menginterpretasikan hasil matematis ke dalam situasi nyata, yaitu dengan menarik kesimpulan:

Jadi berat badan total ketiga orang tersebut adalah 143 kg.

Penyelesaian diatas dapat disusun dalam sebuah penyelesaian formal sebagai berikut:

Misalkan A : Berat badan anak (kg),
 B : Berat badan ibu (kg), dan
 C : Berat badan ayah (kg).

Dipunyai $A + B = 73$, $A + C = 91$, dan $B + C = 122$.

$$\begin{array}{r} \text{Jelas } A + B = 73 \\ \quad \quad A + C = 91 \\ \quad \quad B + C = 122 \quad + \\ \hline 2(A + B + C) = 286 \quad \Leftrightarrow A + B + C = 143 \end{array}$$

Jadi berat badan total ketiga orang tersebut adalah 143 kg.

Dari proses penyelesaian di atas dapat diamati bahwa secara garis besar, proses penyelesaian soal pemodelan matematika di tempuh melalui tahap mengetahui situasi nyata, merumuskan model nyata kemudian mengubahnya menjadi model matematika dan diselesaikan sehingga memperoleh hasil matematis, dan akhirnya diinterpretasikan ke dalam situasi nyata.

2. Pasta gigi.

Soal: Menyikat gigi adalah bagian dari rutinitas sehari-hari kita. Dapatkah Anda memberikan rumus umum untuk berapa hari kira-kira sebuah pasta gigi dipakai hingga habis? Berikan alasan secara matematis!



Gambar 4. Pasta gigi dan sikat gigi (Reit, 2016).

Penyelesaian:

Penyelesaian soal ini dapat dilakukan dengan menyusun model nyata dari situasi nyata, kemudian mengubah menjadi model matematis dan diselesaikan sehingga diperoleh hasil matematis yang dapat diinterpretasikan kedalam situasi nyata.

Dari soal tentang sikat gigi pada bagian sebelumnya, dapat diketahui bahwa **situasi nyata** dari masalah tersebut adalah diketahui sebuah pasta gigi dan sebuah sikat gigi dan ditanyakan berapa hari kira-kira sebuah pasta gigi dipakai hingga habis?

Ukuran radius dan ketinggian dari kemasan pasta gigi dapat diperkirakan berdasarkan gambar yang diberikan atau berdasarkan informasi nyata dari ukuran kemasan pasta gigi pada umumnya. Diasumsikan panjang sikat gigi rata-rata adalah 15 cm. Dari Gambar 2.1 tampak panjang sikat gigi hampir sama dengan ketinggian kemasan pasta gigi, sehingga dapat diperkirakan bahwa ketinggian dari tabung tempat yang berisi pasta gigi (selain bagian tutup) adalah 14 cm. Dengan perbandingan, diperkirakan radius dari tabung adalah 1 cm. Misal dalam sehari sikat gigi dilakukan 3 kali dan setiap satu kali pakai ukuran panjang pasta gigi sama dengan panjang bagian bulu dari sikat gigi yaitu 2 cm dan radius pasta gigi yang dipakai adalah 0,5 cm.

Untuk mengetahui berapa hari kira-kira sebuah pasta gigi dipakai hingga habis dapat dilakukan dengan menghitung banyaknya pasta gigi tersebut keseluruhan dibagi dengan banyaknya pasta gigi yang dipakai dalam satu hari (**model nyata**).

Tempat atau kemasan pasta gigi dapat ditafsirkan berbentuk tabung, sehingga banyaknya pasta gigi keseluruhan sama dengan volum silinder besar dengan ukuran sama dengan ukuran kemasan pasta gigi. Bentuk pasta gigi yang dipakai dalam satu kali pakai dapat ditafsirkan juga berbentuk silinder kecil dengan ukuran sama dengan ukuran pasta gigi dalam satu kali pakai. Telah dimisalkan bahwa dalam sehari sikat gigi dilakukan tiga kali, sehingga secara matematis, dapat dinyatakan bahwa volum silinder besar dibagi tiga kali volum silinder kecil harus dihitung untuk menyelesaikan soal tersebut (**model matematis**). Dimisalkan variabel untuk volum silinder besar adalah V_b , radius silinder besar adalah r_b , ketinggian silinder besar adalah t_b , volum silinder kecil adalah V_k , radius silinder kecil adalah r_k , dan ketinggian silinder kecil adalah t_k .

Sehingga, diperoleh **hasil matematis** sebagai berikut:

$$\begin{aligned}V_b &= \pi \cdot r_b^2 \cdot t_b \\ &= 3,14 \cdot (1 \text{ cm})^2 \cdot 14 \text{ cm} \\ &= 43,96 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_k &= \pi \cdot r_k^2 \cdot t_k \\ &= 3,14 \cdot (0,5 \text{ cm})^2 \cdot 2 \text{ cm} \\ &= 1,57 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Kemudian volum silinder besar dibagi tiga kali volum silinder kecil diperoleh:

$$\frac{V_b}{3 \cdot V_k} = \frac{43,96 \text{ cm}^3}{3 \cdot (1,57 \text{ cm}^3)} = \frac{43,96 \text{ cm}^3}{4,71 \text{ cm}^3} = 9,33$$

Jadi pasta gigi akan habis kira-kira dalam waktu 9 hari (**situasi nyata**)

Penyelesaian diatas merupakan salah satu dari banyak alternatif cara penyelesaian soal tentang pasta gigi. Perbedaan model matematika yang dipakai dan asumsi yang dipakai akan menghasilkan jawaban yang berbeda.

3. *Polder Semarang Tawang.*

Soal: Polder Semarang Tawang berfungsi mengatasi masalah banjir di Kawasan Kota Lama Semarang. Andaikan sekarang kawasan kota lama sedang dalam keadaan darurat, dan anda diminta untuk menaikkan pintu air satu meter dari posisi semula. Berapa kali kendali pintu air harus diputar?



Gambar 5. Polder Semarang Tawang (Cahyono & Ludwig, 2017).

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal tentang polder Semarang Tawang dapat diawali dengan mengamati pola dan bentuk bagian-bagian dari pintu air dan fungsinya, dapat ditentukan bahwa pintu akan naik atau turun jika roda gigi berputar, dan rotasi roda gigi-roda gigi ini dipengaruhi oleh perputaran kendali pintu air.

Ada empat roda gigi, satu kendali pintu air dan sebuah pintu air. Ada 12 gerigi di roda gigi pertama, 36 di roda gigi kedua, 12 di roda gigi ketiga dan 36 di roda gigi keempat. Dengan mengamati hubungan antara bagian-bagian, dapat ditemukan

bahwa 1 kali putaran kendali pintu air berakibat roda gigi pertama berputar 1 kali putaran, 1 kali putaran roda gigi pertama bisa memutar $\frac{1}{3}$ kali putaran roda gigi kedua, 1 kali putaran roda gigi ke dua bisa memutar 3 kali putaran roda gigi ketiga, 1 kali putaran roda gigi ketiga bisa memutar $\frac{1}{3}$ kali putaran roda gigi keempat, dan pintu air akan naik 10 cm dari posisi semula ketika roda gigi keempat berputar 1 kali.

Permasalahan yang harus dipecahkan adalah berapa banyaknya putaran kendali pintu air sehingga pintu air akan naik 1 meter atau 100 cm. Penyelesaiannya dapat dikerjakan secara matematis sebagai berikut:

Misalkan: banyaknya putaran kendali pintu air : a,
 banyaknya putaran roda gigi I : b,
 banyaknya putaran roda gigi II : c,
 banyaknya putaran roda gigi III : d,
 banyaknya putaran roda gigi IV : e,
 pergeseran naik pintu air per 1 cm : f

Berdasarkan pengamatan terhadap obyek diperoleh persamaan-persamaan:

$$1 a = 1 b$$

$$1 b = \frac{1}{3} c$$

$$1 c = 3 d$$

$$1 d = \frac{1}{3} e$$

$$1 e = 10 f$$

Menaikkan pintu air sebesar 1 m atau 100 cm

$$\begin{aligned} 100 f &= 10 \cdot 10 f \\ &= 10 \cdot 1 e \\ &= 10 \cdot 3 d \\ &= 10 \cdot \left(3 \left(\frac{1}{3} c \right) \right) \end{aligned}$$

$$= 10.3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (3 \cdot b) \right)$$

$$= 10.3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (3 \cdot a) \right)$$

$$= 30 a$$

Jadi untuk menaikkan pintu air sebesar 1 m diharuskan memutar kendali pintu air sebanyak 30 kali putaran.