BAB II

RELASI DAN FUNGSI

Dalam kehidupan nyata, senantiasa ada hubungan (relasi) antara dua hal atau unsur-unsur dalam suatu kelompok. Misalkan, hubungan antara suatu urusan dengan nomor telepon, antara pegai dengan gajinya, dan lain-lain. Pada bab ini, akan dibahas tentang hubungan antara dua himpunan tak kosong dengan suatu aturan pengkaitan tertentu. Pembahasan tersebut meliputi definisi relasi dan fungsi, operasi beserta sifat-sifatnya.

2.1 Definisi Relasi dan Cara Penyajian

Pada bab sebelumnya, telah dibahas tentang *Cartesian product*, yaitu berupa pasangan terurut yang menyatakan hubungan dari dua himpunan. Semua pasangan terurut yang mungkin merupakan anggota dari himpunan hasil *Cartesian product* dua buah himpunan. Sebagian dari anggota himpunan tersebut mempunyai hubungan yang khusus (tertentu) antara dua unsur pada pasangan urut tersebut, dengan aturan tertentu. Aturan yang menghubungkan antara dua himpunan dinamakan relasi biner. Relasi antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu. Dengan demikian relasi biner R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.

Notasi dari suatu relasi biner adalah $a\ R\ b$ atau $(a, b) \in R$. Ini berarti bahwa a dihubungankan dengan b oleh R. Untuk menyataan bahwa suatu unsur dalam *cartesian product* bukan merupakan unsur relasi adalah $a \not{R}\ b$ atau $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R. Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

Contoh 2.1 :

Misalkan $A = \{2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.
Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

Jawab :

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, *cartesian product* $A \times B$ adalah :

$$A \times B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 9), (2, 15), (3, 2), (3, 4), (3, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 2), (4, 4), (4, 8), (4, 9), (4, 15)\}$$

Dengan menggunakan definisi relasi diatas, relasi R dari A ke B yang mengikuti aturan tersebut adalah :

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

Relasi dapat pula terjadi hanya pada sebuah himpunan, yaitu relasi pada A.. Relasi pada himpunan A merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $A \times A$.

Contoh 2.2 :

Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh :

$(x, y) \in R$ jika dan hanya jika x habis dibagi oleh y.

Jawab :

Relasi R pada A yang mengikuti aturan tersebut adalah :

$R = \{(2, 2), (4, 4), (4, 2), (8, 8), (8, 2), (8, 4), (3, 3), (9, 9), (9, 3)\}$

Cara menyatakan suatu relasi bisa bermacam-macam, antara lain : dengan diagram panah, tabel, matriks, bahkan dengan *graph* berarah. Berikut ini, akan dibahas satu-persatu cara menyajikankan suatu relasi dengan cara-cara tersebut.

Cara menyajikan suatu relasi :

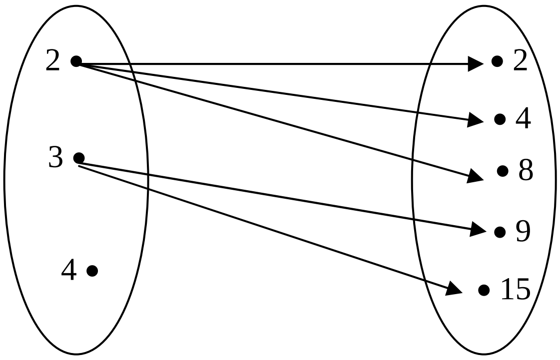
a. Penyajian Relasi dengan Diagram Panah

Misalkan $A = \{2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

maka relasi tersebut dapat digambarkan dengan diagram panah berikut ini :



b. Penyajian Relasi berupa Pasangan Terurut

Contoh relasi pada (a) dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, yaitu :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)}

c. Penyajian Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil. Relasi pada yang dijelaskan pada bagian (a) dapat sebagai berikut :

Tabel Relasi faktor prima dari

A	*B*
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15

d. Penyajian Relasi dengan Matriks

Misalkan R merupakan relasi yang menghubungkan himpunan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan himpunan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu :

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Unsur-unsur m_{ij} pada matriks itu bernilai satu atau nol, tergantung apakah unsur a_i pada himpunan A mempunyai relasi dengan unsur b_j pada himpunan B. Pernyataan
tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 2.3 :

Misalkan $A = \{2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.
Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

maka relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu :

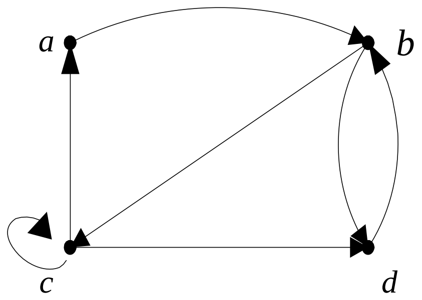
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Penyajian Relasi dengan Graf Berarah

Relasi pada sebuah himpunan dapat disajikankan secara grafis dengan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf berarah didefinisikan hanya untuk merepresentasikan relasi pada suatu himpunan (bukan antara dua himpuanan). Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*). Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut simpul asal (*initial vertex*) dan simpul b disebut simpul tujuan (*terminal vertex*). Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut *loop*.

Contoh 2.4 :

Misalkan R = {(a, b), (b, c), (b, d), (c, c) (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}.
Relasi R dapat di sajikan dalam bentuk graf berarah yaitu :



2.2 Beberapa Sifat Relasi

Relasi yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut antara lain :

1. **Refleksif** (*reflexive*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Dengan kata lain, suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 2.5 :

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R adalah relasi '≤' yang didefinisikan pada himpunan A, maka

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

Terlihat bahwa (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) merupakan unsur dari R. Dengan demikian R dinamakan bersifat refleksif.

Contoh 2.6 :

Misalkan A = {2, 3, 4, 8, 9, 15}.
Jika kita definisikan relasi R pada himpunan A dengan aturan :

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

Perhatikan bahwa $(4, 4) \notin R$.
Jadi, jelas bahwa R tidak bersifat refleksif.

Sifat refleksif memberi beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang unsur diagonal utamanya semua bernilai 1, atau m_{ii} = 1, untuk i = 1, 2, …, n,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Relasi yang bersifat refleksif jika disajikan dalam bentuk graf berarah maka pada graf tersebut senantiasa ditemukan *loop* setiap simpulnya.

2. **Transitif** (*transitive*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **transitif** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 2.7 :

Misalkan $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, dan relasi R didefinisikan oleh :

$a\ R\ b$ jika dan hanya jikan a membagi b, dimana $a, b \in A$,

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8)\}$

Ketika $(2, 4) \in R$ dan $(4, 8) \in R$ terlihat bahwa $(2, 8) \in R$.
Dengan demikian R bersifat transitif.

Contoh 2.8 :

R merupakan relasi pada himpunan bilangan asli **N** yang didefinisikan oleh :

$R\ :\ a + b = 5,\quad a, b \in A,$

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

$R = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) \}$

Perhatika bawa $(1, 4) \in R$ dan $(4, 1) \in R$, tetapi $(1, 1) \notin R$.
Dengan demikian R *tidak* bersifat transitif.

Sifat transitif memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu : sifat transitif pada graf berarah ditunjukkan oleh :

Jika ada busur dari a ke b dan busur dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.

Pada saat menyajikan suatu relasi transitif dalam bentuk matriks, relasi transitif tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya

3. **Simetri** (*symmetric*) dan **Anti Simetri** (*antisymmetric*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **simetri** jika $(a, b) \in R$, untuk setiap $a, b \in A$, maka $(b, a) \in R$. Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak simetri jika $(a, b) \in R$ sementara itu $(b, a) \notin R$.
Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan **anti simetri** jika untuk setiap $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ berlaku hanya jika $a = b$. Perhatikanlah bahwa istilah simetri dan anti simetri tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana $a \neq b$.

Contoh 2.9 :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :

$a R b$ jika dan hanya jika $a - b \in$ Z.

Periksa apakah relasi R bersifat simetri !

Jawab :

Misalkan $a R b$ maka $(a - b) \in \mathbf{Z}$, Sementara itu jelas bahwa $(b - a) \in \mathbf{Z}$.
Dengan demikian R bersifat simetri.

Contoh 2.10 :

Tunjukan bahwa relasi '$\leq$' merupakan pada himpunan **Z**. bersifat anti simetri

Jawab :

Jelas bahwa jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = b$.
Jadi relasi '$\leq$' bersifat anti simetri.

Contoh 2.11 :

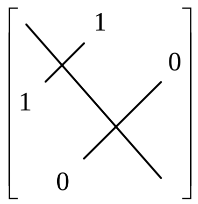
Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat asli **N** merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika $a = b$. Sementara itu, relasi "habis membagi" merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$.

Contoh 2.12 :

Misalkan relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ maka relasi R merupakan relasi yang simetri sekaligus relasi yang anti simetri.

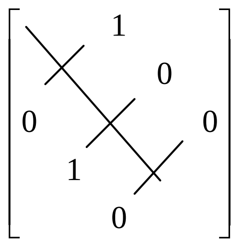
Sifat simetri dan anti simetri memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian berbentuk matriks maupun graf, yaitu :

- Relasi yang bersifat simetri mempunyai matriks yang unsur-unsur di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-unsurdi atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ adalah :



Relasi yang bersifat simetri, jika disajikan dalam bentuk graf berarah mempunyai ciri bahwa jika ada busur dari *a* ke *b*, maka juga ada busur dari *b* ke *a*.

- Relasi yang bersifat anti simetri mempunyai matriks yang unsur mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi anti simetri adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat anti simetri mempunyai ciri bahwa tidak akan pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

Misalkan, *R* merupakan relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*. **Invers dari relasi** *R*, dilambangkan dengan $\boldsymbol{R^{-1}}$, adalah relasi dari himpunan *B* ke himpunan *A* yang didefinisikan oleh :

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 2.13 :

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.
Jika didefinisikan relasi *R* dari *P* ke *Q* yaitu :

$(p, q) \in R$ jika dan hanya jika *p* habis membagi *q*

maka kita peroleh :

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)$

R^{-1} merupakan *invers* dari relasi *R*, yaitu relasi dari *Q* ke *P* yang berbentuk :

$(q, p) \in R^{-1}$ jika *q* adalah kelipatan dari *p*

sehingga diperoleh :

$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$

Jika *M* adalah matriks yang menyajikan suatu relasi *R*,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Operasi pada Relasi

Relasi merupakan himpunan pasangan terurut maka beberapa operasi aljabar yang berlaku pada himpunan, juga beraku pada relasi. Operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup juga berlaku atara dua relasi. Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi merupakan dari A ke B.

Contoh 2.14 :

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.
Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
Maka :
$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Misalkan, relasi R_1 dan R_2 masing-masing disajikan dalam bentuk matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$ dan $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Contoh 2.15 :

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan T adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $T \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C,$
dan untuk suatu $b \in B$ sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$ $\}$

Contoh 2.16 :

Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$

Sementara itu, relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$

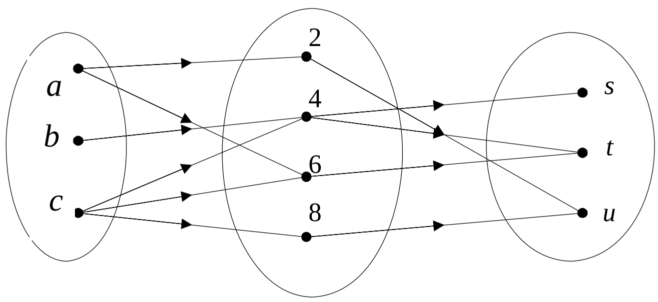
Sedangkan relasi dari himpunan B ke himpunan C didefisikan oleh :

$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

Maka komposisi relasi R dan T adalah

$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$

Jika disajikan dengan diagram panah, komposisi relasi R dan T adalah :



Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah :

$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$

dimana $M_{R1} \cdot M_{R2}$ merupakan perkalian antara dua buah matriks, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan logika "$\wedge$" (dan), sedangakan tanda tambah diganti dengan logika "$\vee$" (atau).

Contoh 2.17 :

Misalkan relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A disajikan dalam bentuk matriks berikut :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan R_2 o R_1 adalah

$$M_{R2 \text{ o } R1} = M_{R1} \,.\, M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Relasi Ekivalen dan Relasi Terurut

Sebuah relasi pada himpunan A dinamakan **relasi ekivalen** jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif. Dua unsur yang berelasi ekivalen disebut equivalent.

Contoh 2.18 :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah Z,
yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika a = b atau a = – b .

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

Jawab :

- Jelas bahwa $a = a$, dengan kata lain jika a R a untuk setiap $a \in \mathbf{Z}$.
  Jadi R merupakan relasi refleksif.
- Jika $a = \pm b$ dan $b = \pm c$, ini mengakibatkan $a = \pm c$. Dengan kata lain jika a R b maka b R c maka a R c.
  Dengan demikian R merupakan relasi transitif.
- Jika a = b atau a = – b maka b = a atau b = – a, dengan kata lain jika a R b maka b R a.
  Jadi R merupakan relasi simetri.

Dengan demikian *R* merupakan relasi ekivalen.

Contoh 2.19 :

Misalkan *R* merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :

$a \; R \; b$ jika dan hanya jika $a - b \in$ Z.

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

Jawab :

Untuk setiap $a \in$ Rill maka $a - a = 0 \in$ bilangan bulat, oleh karena itu R bersifat refleksif.
Misalkan $a \; R \; b$ maka $(a - b) \in$ Z, jelas bahwa $(b - a) \in$ Z. Dengan demikian R bersifat simetri.
Jika $a \; R \; b$ dan $b \; R \; c$ artinya $(a - b)$, $(b - c) \in$ Z maka
$(a - c) = (a - b) + (b - c)$ juga merupakan bilangan bulat.
Oleh karena itu $a \; R \; c$. Jadi R bersifat transitif.
Dengan demikian *R* merupakan relasi ekivalen.

Contoh 2.20 :

(Modul Kongruen)

Misalkan *m* adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1.
Tunjukan bahwa Relasi

R = {(a,b) | $a \equiv b$ (mod m)} merupakan relasi ekivalen

pada himpunan bilangan bulat.

Jawab :

Ingat bahwa $a \equiv b$ (mod *m*) jika dan hanya jika *m* membagi $a - b$.
Karena $a - a = 0$ dapat dibagi oleh *m*, yaitu 0 = 0 *m*.
Oleh karena itu, $a \equiv a$ (mod m) , sehingga R bersifat refleksif.
$a - b$ dapat dibagi oleh m sehingga $a - b = km$, untuk suatu $k \in$ Z Ini mengakibatkan $b - a = -km$. Jadi relasi tersebut simetri
Misalkan $a \equiv b$ (mod m) dan $b \equiv c$ (mod *m*),
sehingga $a - b$ dan $b - c$ dapat dibagi oleh *m*, atau
$a - b = km$ dan $b - c = lm$ untuk suatu $k, l \in$ Z
Dengan menjumlahkan keduanya :
$a - c = (a - b) + (b - c) = (k + l)\, m$, maka $a \equiv c$ (mod *m*),
Ini menunjukan bahwa relasi tersebut transitif.
Dengan demikian *R* merupakan relasi ekivalen.

Misalkan R adalah relasi ekivalen pada himpunan A. Semua unsur himpunan yang relasi dengan suatu unsure *a* di A dinamakan kelas ekivalen dari *a*.
Kelas ekivalen dari *a* terhadap relasi R dinotasikan oleh $[a]_R$. Jika hanya ada satu relasi pada himpuanan tersebut, notainya adalah $[a]$.

Contoh 2.21 :

Tentukan kelas ekivalen 0, 1, –2, dan –3 pada relasi modul kongruen 4!

Jawab :

[0] = { . . . , – 12, – 8, – 4, 0, 4, 8, 12, . . . }
[1] = { . . . , – 11, – 7, – 3, 1, 5, 9, . . . }
[–2] = { . . . , – 10, – 6, – 2, 2, 6, 10, . . . }
[–3] = { . . . , – 11, – 7, – 3, 1, 5, 9, . . . }

Sebuah relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi terurut parsial** jika relasi tersebut bersifat refleksif, antisimetri dan transitif. Sebuah himpunan **S** yang dilengkapi dengan sebuah relasi R yang terurut parsial, himpunan tersebut dinamakan **himpunan terurut parsial** (partially ordering set **– poset**), Notasi : (***S***, ***R***).

Contoh 2.22 :

Tunjukan bahwa relasi '≤' merupakan relasi terurut pada Z.

Jawab :

Karena $a \leq a$ untuk setiap $a \in$ Z, maka relasi '≤' bersifat refleksi.
Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = a$. Jadi relasi '≤' bersifat antisimetri.
Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ berarti $a \leq c$. Jadi relasi '≤' bersifat transitif.
Dengan demikian relasi '≤' merupakan relasi terurut pada Z.

Setiap unsur dalam poset (S, ρ) dikatakan **comparable** (dapat dibandingkan) jika $a \rho b$ atau $b \rho a$ untuk setiap $a, b \in$ S. Selanjutnya, Jika (S, ρ) merupakan sebuah poset dan setiap dua unsur dalam S adalah comparable, maka S dinamakan Totally Ordered Set (**Himpunan terurut total**) atau **Chain**, sedangkan ρ dinamakan urutan total.

Contoh 2.23 :

1. (N, ≤) merupakan toset.
2. (N, |) bukan toset karena tak comparable.

Jika (S, ρ) adalah sebuah toset dan setiap subset tak kosong dari S paling sedikit memiliki satu unsur, maka (S, ρ) dinamakan **Well-ordered Set** (himpunan terurut dengan baik).

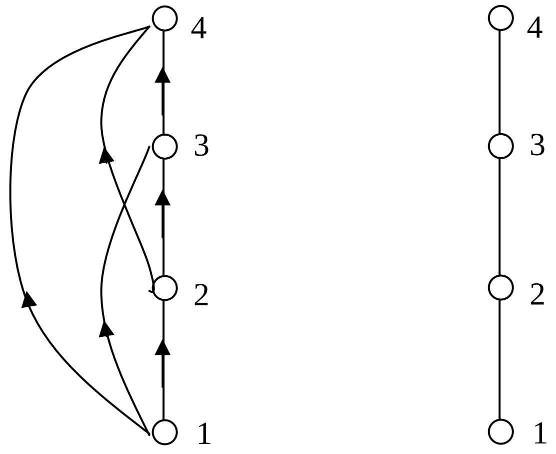
Setiap himpunan terurut parsial dapat disajikan dalam bentuk diagram Hasse. Langkah-langkah dalam menggambar digram Hasse dari suatu poset adalah :

- Gambarkan relasi urutan dalam bentuk directed graph.
- Hapus semua loop (karena refleksif)
- Hapus semua lintasan transitif

Contoh 2.24 :

Gambarkan diagram Hasse dari poset ({1,2,3,4}, $\rho = \{(a, b) \mid a < b\}$)

Jawab :



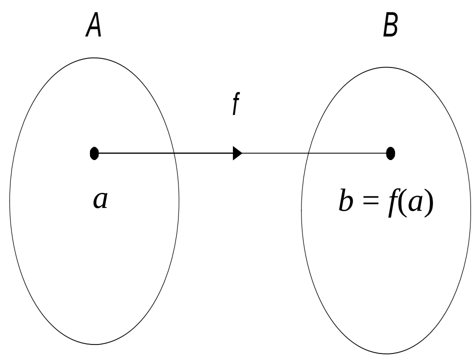
2.5 Fungsi

Misalkan *A* dan *B* merupakan himpunan. Suatu fungsi *f* dari *A* ke *B* merupakan sebuah aturan yang mengkaitkan satu (tepat satu) unsur di *B* untuk setiap unsur di *A*. Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika *b* merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh *f* untuk suatu *a* di *A*. Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$.
Jika *f* adalah fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, kita dapat menuliskan dalam bentuk :

$$f : A \rightarrow B$$

artinya *f* memetakan himpunan *A* ke himpunan *B*.
A dinamakan daerah asal (*domain*) dari *f* dan *B* dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari *f*. Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi.

Misalkan $f(a) = b$, maka *b* dinamakan bayangan (*image*) dari *a* dan *a* dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari *b*. Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan *f* dinamakan jelajah (*range*) dari *f*. Perhatikan bahwa jelajah dari *f* adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari *B*.



Contoh 2.25 :

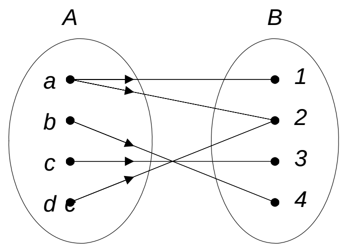
Misalkan f : **R** (Riil) $\rightarrow$ **R** didefinisikan oleh :

$f(x) = x^2$.

Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan Riil, sedangkan jelajah dari f merupakan himpunan bilangan Riil tidak-negatif.

Contoh 2.26 :

Dibawah ini contoh suatu relasi yang bukan merupakan fungsi :



Berikut ini adalah beberapa contoh fungsi dalam berbagai cara penyajiannya, yaitu :

1. Himpunan pasangan terurut.
   Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :
   $f = \{(2, 4), (3, 9)\}$

2. Formula pengisian nilai (*assignment*).

   Contoh 2.27 :

   $f(x) = x^2 + 10$,
   $f(x) = 5x$,

3. Kata-kata
   Contoh 2.28 :

   "f adalah fungsi yang memetakan jumlah bilangan bulat menjadi kuadratnya".

4. Kode program (*source code*)
   Contoh 2.29 :

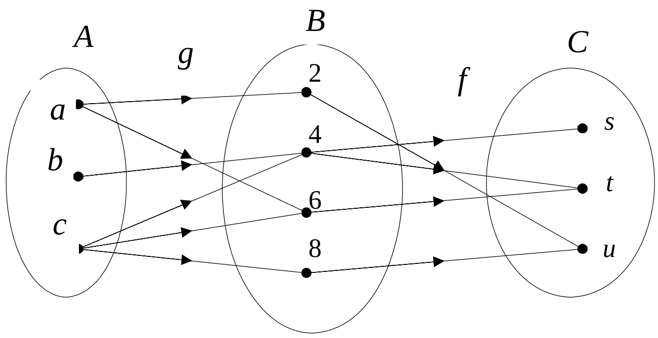
   Fungsi menghitung $|x|$ (harga mutlak dari).

```
function abs(x:integer):integer;
        begin
          if  x  >  0  then
            abs := x
        else
            abs :=  –x;
        end;
```

Misalkan g merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f merupakan fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Fungsi komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, merupakan fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$(f \circ g)(a) = f(g(a))$, untuk suatu a di A.

Perhatikan ilustrasi fungsi komposisi dibawah ini :



Contoh 2.30 :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : Z \rightarrow Z$, diberikan fungsi $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^2$.
Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Jawab :

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.
(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua unsur himpunan A yang memiliki bayangan sama pada himpunan B.

Contoh 2.31 :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
Tentukan apakah $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Jawab :

a. $f(x) = x^2$ bukan fungsi satu-ke-satu,
karena $f(2) = f(-2) = 4$ padahal $-2 \neq 2$.

b. $g(x) = x + 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a + 1 \neq b + 1$.
Misalnya untuk $x = 1$, $g(1) = 2$. Sementara itu, untuk $x = 2$, $g(2) = 3$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap unsur pada himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih unsur himpunan A. Dengan kata lain seluruh unsur B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi **pada** himpunan B.

Contoh 2.32:

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
Tentukan apakah $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 1$ merupakan fungsi pada !

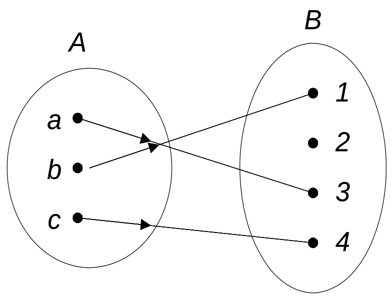
Jawab :

a. $f(x) = x^2$ bukan fungsi pada,
karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari *f*, yaitu bilangan bulat negatif.

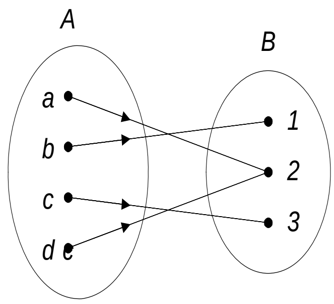
b. $g(x) = x + 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan Riil y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x + 1$.

Suatu fungsi *f* dari himpunan *A* ke himpunan *B* dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika fungsi tersebut **satu-ke-satu** dan juga **pada**.
Agar mendapatkan pengertian yang lebih baik, perhatikan ilustrasi berikut :

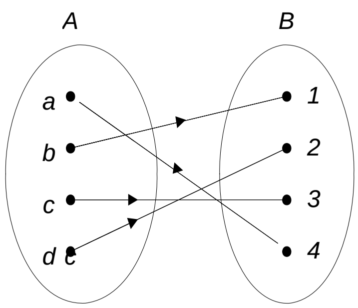
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



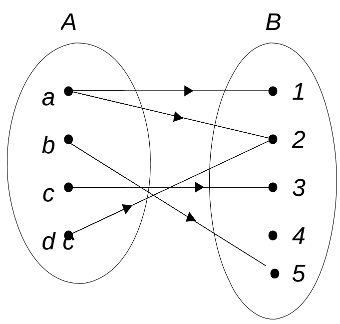
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Fungsi satu-ke-satu dan pada



Bukan fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Jika *f* merupakan fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B* yang berkoresponden satu-ke-satu maka kita senantiasa dapat menemukan balikan (*invers*) dari fungsi *f*. Balikan fungsi dinotasikan dengan f^{-1}. Misalkan *a* adalah anggota himpunan *A* dan *b* adalah anggota himpunan *B*, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu disebut juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalik), sehingga kita dapat mendefinisikan suatu fungsi balikannya. Jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu maka fungsi tersebut dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalik), karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 2.33 :

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x + 1$.

Jawab :

Fungsi $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi invers fungsi tersebut ada.
Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x + 1$, maka $x = y - 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y - 1$.

Contoh 2.34 :

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2$.

Jawab :

Dari contoh sebelumnya, kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2$ adalah fungsi yang *not invertible*.

Latihan :

1. Periksa apakah relasi (dalam bentuk pasangan terurut) berikut merupakan relasi ekivalen :
   a. {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3) }
   b. {(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }

2. Periksa apakah relasi yang direpresentasikan dalam bentuk matriks dibawah ini merupakan relasi ekivalen :

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika suatu relasi R disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Periksa apakah relasi tersebut merupakan relasi terurut !

4. Tentukan dua matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1} (relasi invers) dan komposisi $R \circ R^{-1}$!

5. Gambarkan diagram Hasse dari poset $\{B, \rho\}$
   dimana $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
   $\rho = \{(a,b) \mid a \text{ membagi } b\}$