

MODUL 11 INTEGRAL



Mata Kuliah : MATEMATIKA TEKNIK I
Kode / sks : B2220 / 3 sks
Prodi : TEKNIK MESIN
Semester : III (Tiga)

Disusun oleh :

MAFRUDDIN, S.T., M.T

**PRODI TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO**

Dibiayai Oleh:

**Direktorat Pembelajaran Dan Kemahasiswaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset Dan Teknologi
Kemetrian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi
2023**



MODUL 11 INTEGRAL

1. Pengantar

Assalamu'alaikum wr. Wb.

Kegiatan belajar mengajar untuk mata kuliah Matematika Teknik I dilakukan dengan dua metode yaitu Daring (online) dan Luring (offline). Untuk mempermudah dalam memahami materi yang diberikan dan mencapai kompetensi yang diharapkan maka perlu diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut:

- a. Pelajarilah setiap materi yang terdapat pada modul ini (Modul 11. Integral) dengan sungguh-sungguh, apabila terdapat uraian materi atau pokok bahasan yang kurang dipahami atau belum dimengerti segera tanyakan pada tutor/dosen pengampu mata kuliah.
- b. Bacalah dengan teliti dan pahami apa yang menjadi capaian akhir dari setiap materi yang akan dipelajari
- c. Bacalah dengan teliti dan pahami apa saja indikator capaian pembelajaran yang harus dikuasai.
- d. Berikan tanda pada bagian-bagian materi yang dianggap penting atau bagian yang belum dimengerti untuk ditanyakan kepada tutor/dosen pengampu mata kuliah.
- e. Buka dan pelajari setiap link materi (video atau dokumen lainnya) yang diberikan oleh tutor/dosen pengampu mata kuliah untuk menambah pemahaman Anda terkait materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar pada modul ini.
- f. *Download* dan Putarlah video penjelasan yang ada terkait materi atau pokok bahasan agar dapat memahami isi materi pada kegiatan ini secara lebih jelas dan paham serta dapat menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan. Jika diperlukan, putarlah video penjelasan berulang-ulang supaya benar-benar paham.
- g. Carilah sumber referensi lainnya untuk menambah materi bahan ajar (baik dalam bentuk materi penjelasan maupun contoh-contoh soal) dan melengkapi tugas pada masing-masing topik perkuliahan serta memperluas wawasan Anda.
- h. Pahami tugas yang harus didiskusikan dengan teman-temanmu (tugas kelompok) pada bagian forum diskusi pada topik bahasan tertentu. Gunakan pengetahuan dan pengalaman Anda sebelumnya untuk mendiskusikan penyelesaian masalah yang diberikan dalam forum diskusi tersebut.
- i. Bacalah dan pahami pada bagian rangkuman materi untuk lebih meningkatkan pemahaman substansi materi dari materi kegiatan belajar yang telah dipelajari dan diskusikan.
- j. Kerjakan tugas dengan semaksimal mungkin dan ikuti panduan yang diberikan serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk menilai apakah jawaban Anda sudah memadai atau belum.
- k. Kumpulkan tugas sesuai dengan batas waktu yang telah ditetapkan.
- l. Kerjakan tugas Anda dengan jujur dan jangan mencontek.
- m. Tugas dikumpulkan di SPADA UM METRO.

2. Capaian pembelajaran

Setelah mempelajari keseluruhan materi pada modul ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan tentang integral standar dan integral polinomial. Memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik di dalam menyelesaikan tugasnya.

3. Indikator Capaian Pembelajaran

Adapun tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Capaian Pembelajaran Kegiatan Belajar ini secara rinci akan diukur dari kemampuan mahasiswa dalam:

- Menjelaskan tentang integral standar dan integral polinomial
- Memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik di dalam menyelesaikan tugasnya.

4. Alokasi Jam Pembelajaran (JP) per pertemuan

- Total alokasi waktu : 3 x 50 menit
- Mode pembelajaran : Daring (online)
- Pertemuan : 13 (tiga belas)

5. Pokok-pokok materi

- Pengantar integral
- Integrasi standar
- Integral pernyataan polinomial
- fungsi dari fungsi linier x
- Integral dengan pecahan parsial

6. Integrasi nilai islam

- Al-quran Qs At Taubah ayat 11

فَإِنْ تَابُوا وَأَقَامُوا الصَّلَاةَ وَآتَوُا الزَّكَاةَ فَإِخْوَانُكُمْ فِي الدِّينِ ۗ وَنُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿١١﴾

11. jika mereka bertaubat, mendirikan sholat dan menunaikan zakat, Maka (mereka itu) adalah Anda-Andamu seagama. dan Kami menjelaskan ayat-ayat itu bagi kaum yang mengetahui.

- Hadist

1. Tirmidzi 3264

سنن الترمذي ٣٢٦٤: حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ بَشَّارٍ حَدَّثَنَا عَبْدُ الرَّحْمَنِ بْنُ مَهْدِيٍّ حَدَّثَنَا سُفْيَانُ عَنْ أَبِي الزُّبَيْرِ عَنْ جَابِرٍ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَمَرْتُ أَنْ أُقَاتِلَ النَّاسَ حَتَّى يَقُولُوا لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ فَإِذَا قَالُوا عَصَمُوا مِنِّي دِمَاءَهُمْ وَأَمْوَالَهُمْ إِلَّا بِحَقِّهَا وَحِسَابُهُمْ عَلَى اللَّهِ ثُمَّ قَرَأَ { إِنَّمَا أَنْتَ مُذَكَّرٌ لَسَتْ عَلَيْهِمْ بِمُصَيِّطٍ } قَالَ أَبُو عِيسَى هَذَا حَدِيثٌ حَسَنٌ صَحِيحٌ.

Sunan Tirmidzi 3264: Telah menceritakan kepada kami Muhammad bin Basysyar telah menceritakan kepada kami Abdur Rahman bin Mahdi telah menceritakan kepada kami Sufyan dari Abu Az Zubair dari Jabir, ia berkata: Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam bersabda: "Aku diperintahkan untuk

memerangi manusia hingga mereka mengucapkan Laa ilaaha illallaah, apabila mereka mengucapkannya maka mereka telah melindungi darah dan harta mereka dariku, kecuali karena ada alasan yang dibenarkan, dan perhitungannya atas Allah." Kemudian beliau membaca ayat: Berilah peringatan, karena sesungguhnya kamu hanyalah orang yang memberi peringatan. Kamu bukanlah orang yang berkuasa atas mereka. (Al Ghasyiyah: 21-22) Abu Isa berkata: hadits ini adalah hadits hasan shahih.

7. Uraian Materi

a. Pengantar integral

Pada pertemuan sebelumnya telah dipelajari mengenai turunan atau diferensial. Pada modul ini akan dibahas mengenai kebalikan atau anti turunan yang umum disebut dengan integral. Integral juga berkaitan erat dengan limit. Integral bergantung pada sifat turunan dan tidak berdiri sendiri. Sebagai contoh $d/dx (x^3) = 3x^2$. Integral merupakan kebalikan dari turunan, untuk menguji hal tersebut maka perlu dilakukan percobaan untuk mengujinya. Maka seharusnya integral dari $3x^2$ terhadap x maka diperoleh x^3 . Maka dapat ditulis sebagai berikut.

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

Integral dari fungsi $f(x)$ terhadap variabel x dinyatakan dalam simbol “ \int ”. *integral* merupakan pernyataan fungsi x yang akan diintegrasikan dan dalam proses pengintegrasian dibantu dengan proses diferensial dx .

b. Konstanta integral

Dalam beberapa contoh berikut dapat diketahui bahwa pada proses diferensial terdapat konstanta yang apabila diturunkan akan sama dengan “0”. dimana nilai awal dari konstanta tersebut merupakan nilai sembarang yang tidak diketahui. Untuk itu dalam proses integral perlu ditambahkan konstanta yang digunakan untuk menggantikan nilai sembarang tersebut. Sebagai contoh:

$$\begin{aligned} d/dx (x^3) &= 3x^2 && \rightarrow \int 3x^2 dx = x^3 \\ d/dx (x^2 + 1) &= 2x && \rightarrow \int 2x dx = x^2 + 1 \\ d/dx (x^3 - 2) &= 3x^2 && \rightarrow \int 3x^2 dx = x^3 - 2 \\ d/dx (x^5 + 2) &= 5x^4 && \rightarrow \int 5x^4 dx = x^5 + 2 \end{aligned}$$

Berdasarkan contoh tersebut nilai konstanta ketika didiferensialkan akan sama dengan 0 tetapi ketika diintegrasikan nilai tersebut tidak diketahui. Untuk itu di tambahkan konstanta pada proses integral. Konstanta dalam integral disebut dengan *konstanta integrasi* dan di notasikan dengan “ C ” dan harus selalu disertakan.

Sebagai contoh:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

Pada kondisi ini nilai C tidak diketahui, maka disebut dengan *integral taktentu*. Pada kondisi yang lain dengan beberapa informasi dapat dimungkinkan nilai C dapat diketahui.

Sebagai contoh:

Integral $a = \int 2x \, dx$ diketahui $a = 2$, jika $x = 1$. Tentukan nilai C .

Diketahui bahwa $a = \int 2x \, dx = x^2 + C$.

Maka $a = x^2 + C$

Dimana $a = 2$ jika $x = 1$

Sehingga $a = x^2 + C$

$$2 = 1^2 + C \quad \rightarrow C = 1$$

Jadi, $a = x^2 + 1$

c. Integrasi standar

Seperti yang diketahui bahwa turunan atau diferensial merupakan kebalikan dari integral, sebagai contoh:

$$d/dx (\sin x) = \cos x \quad \rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

pada pertemuan sebelumnya telah dipelajari tentang diferensial dan sifat-sifat diferensial tersebut memberikan informasi untuk menyelesaikan integral standar sebagai berikut:

1) $d/dx (x^n) = nx^{(n-1)}$. Untuk menentukan diferensial maka pangkat $(n-1)$ sedangkan integral adalah kebalikannya maka menjadi $(n+1)$,

$$d/dx (x^{n+1}) = (n+1)x^n$$

$$d/dx \left(\frac{x^n}{n+1} \right) = x^n \text{ berarti bahwa } \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

dengan catatan: $(n \neq -1)$

contoh:

$$\begin{aligned} \int x^5 \, dx &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + C \\ &= \frac{x^6}{6} + C \end{aligned}$$

Coba cek hasilnya dengan diferensial:

$$d/dx \left(\frac{x^6}{6} + C \right) = d/dx \left(\frac{6x^{6-1}}{6} + C \right) = x^5$$

dan mendapatkan hasil yang sama.

2) $d/dx (\cos x) = -\sin x$
 $d/dx (-\cos x) = \sin x \quad \rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

Contoh:

$$\int 6 \sin x \, dx = -6 \cos x + C$$

Coba cek hasilnya dengan diferensial:

$$d/dx (-6 \cos x + C) = d/dx [\cos x \cdot 0 + (-6) - \sin x] + 0 = -6 \sin x$$

3) $d/dx (e^x) = e^x \quad \rightarrow \int e^x \, dx = e^x + C$

Contoh:

$$\int 5e^x \, dx = 5e^x + C$$

Coba cek hasilnya dengan diferensial:

$$d/dx (5e^x + C) = 5e^x + 0 = 5e^x$$

4) $d/dx (\ln x) = 1/x \quad \rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$

Contoh:

$$\int \frac{5}{x} \, dx = 5 \ln x + C$$

Coba cek hasilnya dengan diferensial:

$$d/dx (5 \ln x + C) = d/dx (5/x + 0) = 5/x$$

5) $d/dx (a^x) = a^x \ln a \quad \rightarrow \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Contoh:

$$\int 5^x \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

Coba cek hasilnya dengan diferensial: $d/dx a^x = a^x \ln a$

$$d/dx \left(\frac{5^x}{\ln 5} + C \right) = d/dx (5^x + 0) = 5^x$$

secara umum rumus untuk integral dijelaskan pada tabel berikut:

$f(x)$	$\int f(x) \, dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
1	$x + C$
a	$ax + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$1/x$	$\ln x + C$

Catatan: $n \neq -1$

d. Integral pernyataan polinomial

Integral yang dilakukan pada pernyataan polinomial merupakan langkah integral suku demi suku dengan masing-masing konstanta yang terdapat pada pernyataan polinomial dan digabung dengan satu simbol C untuk seluruh pernyataan tersebut. Sebagai contoh:

$$\int (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$$

Hasil integralnya yaitu:

$$\begin{aligned} &= \frac{5x^{4+1}}{4+1} + \frac{4x^{3+1}}{3+1} + \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} + x + C \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + C \end{aligned}$$

Contoh:

Diketahui pernyataan sebagai berikut.

$$M = \int 3x^2 - 4x + 1)dx \text{ jika } x = -1, \text{ diketahui bahwa di } x = 2 \text{ nilai } M = -12$$

Tentukan nilai

- 1) Integralnya
- 2) Buatlah fungsi yang dihasilkan dalam bentuk tanda berkurung
- 3) Nilai konstanta integritasi (C) apabila $x = 2$ dan $M = -12$.
- 4) Nilai M apabila $x = -1$

Jawab:

- 1) Integral

$$\begin{aligned} M &= \frac{3x^{2+1}}{2+1} - \frac{4x^{1+1}}{1+1} + x + C \\ M &= x^3 - 2x^2 + x + C \end{aligned}$$

- 2) Tanda kurung

$$\begin{aligned} M &= \{x^2 - 2x + 1\}x + C \\ M &= \{[x - 1][x - 1]\}x + C \end{aligned}$$

- 3) Konstanta C

$$\text{Di } x = 2 \text{ maka } M = -12$$

Sehingga nilai konstanta C yaitu:

$$\begin{aligned} -12 &= \{[2 - 1][2 - 1]\}2 + C \\ -12 &= \{[1][1]\}2 + C \\ -12 &= 2 + C \\ -14 &= C \rightarrow M = \{[x - 1][x - 1]\}x - 14 \end{aligned}$$

- 4) Nilai M apabila $x = -1$

$$\begin{aligned} M &= \{[-1 - 1][-1 - 1]\} - 1 - 14 \\ M &= \{[-2][-2]\} - 1 - 14 \\ M &= -18 \end{aligned}$$

e. **Fungsi dari fungsi linier x**

apabila mendapati suatu pernyataan dengan variabel x digantikan dengan pernyataan linier dalam x , misal $ax + b$ sebagai contoh $y = \int (2x + 1)^2 dx$. Bentuknya berstruktur sama seperti $y = \int x^2 dx$ dengan catatan variabel x digantikan dengan $(2x+1)$. Dimisalkan $u = (2x+1)$, Maka

$$y = \int (2x + 1)^2 dx$$

menjadi

$$y = \int u^2 dx$$

diketahui integral diatas berbeda antara u dan dx , dan untuk menentukan integralnya, maka perlu merubah variabel x dalam dx , sehingga perlu dilakukan diferensial u terhadap x ,

$$u = (2x + 1)$$

$$du/dx = 2 \quad \rightarrow \text{maka diperoleh bahwa } dx = du/2$$

dengan mensubstitusikan $dx = du/2$ maka integralnya menjadi

$$y = \int u^2 dx$$

$$y = \int u^2 du/2$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{u^{2+1}}{2+1} + C$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{(2x+1)^3}{3} \right) + C$$

$$y = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$

Untuk mengintegalkan suatu “fungsi dari suatu fungsi linier x” maka cukup dilakukan dengan mengganti x ke dalam hasil yang bersesuaian dengan pernyataan linier dan membanginya dengan koefisien x dalam pernyataan linier tersebut.

Untuk menguji apakah hasil integral yang dilakukan sudah benar maka perlu di diferensialkan hasil tersebut,

$$y = \frac{(2x+1)^3}{6} + C \quad (\text{merupakan bentuk diferensial } u/v)$$

$$u = (2x + 1)^3 \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 3(2x + 1)^{3-1} \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$$

$$v = 6 \quad \rightarrow \frac{dv}{dx} = 0$$

maka,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 \cdot 6(2x+1)^2 - (2x+1)^3 \cdot 0}{6^2} + 0$$
$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^2$$

Diketahui bahwa hasilnya benar.

$$y = \int (2x + 1)^2 dx \quad \rightarrow y = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$
$$y = \frac{(2x+1)^3}{6} + C \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x + 1)^2$$

Contoh :

$$\int \cos 2x dx$$

Misal $u = 2x$

Maka $du/dx = 2$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \cos 2x dx$$
$$\int \cos u \frac{du}{2} = -\sin u \frac{1}{2} + C$$
$$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

f. **Integral dengan pecahan parsial**

Untuk menyelesaikan integral dalam bentuk pecahan perlu dilakukan penyederhanaan dengan struktur yang lebih sederhana. Sebagai contoh:

$$\int \frac{7x+8}{2x^2+11x+5} dx$$

Dimana

$$\frac{7x+8}{2x^2+11x+5} = \frac{7x+8}{(2x+1)(x+5)} = \frac{1}{(2x+1)} + \frac{3}{(x+5)}$$

sehingga

$$\int \frac{7x+8}{2x^2+11x+5} dx = \int \frac{1}{(2x+1)} + \int \frac{3}{(x+5)} dx$$

Pecahan parsial tersebut merupakan fungsi dari fungsi linier x yang bentuk mengacu pada integral standar $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

$$\int \frac{7x+8}{2x^2+11x+5} dx = \int \frac{1}{(2x+1)} + \int \frac{3}{(x+5)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln (2x+1) + 3 \ln (x+5) + C$$

8. Rangkuman

- Pengantar integral merupakan kebalikan dari turunan atau diferensial.
- Integrasi standar

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
1	$x + C$
a	$ax + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$1/x$	$\ln x + C$

Catatan: $n \neq -1$

- Integral pernyataan polinomial

$$\int (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + C$$

- Fungsi dari fungsi linier x

$$y = \int (2x + 1)^2 dx$$

$$y = \int u^2 dx$$

$$y = \int u^2 du/2$$

$$y = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$

- Integral dengan pecahan parsial

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = A \frac{\ln(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \frac{7x+8}{2x^2+11x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + 3 \ln(x+5) + C$$

9. Tugas

- Membuat resume dari video penjelasan sesuai dengan topik bahasan dan jawab pertanyaan berikut.
 - Jelaskan sampai dimana tingkat pemahaman anda tentang materi yang diberikan
 - Jelaskan menurut pendapat anda pentingnya video penjelasan terhadap proses belajar
 - Langkah apasaja yang telah anda lakukan untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang materi yang diberikan
 - Berikan contoh penerapan atau aplikasi tentang integral dalam kehidupan sehari-hari.



2. Membuat makalah (pengembangan materi) tentang integral dari sumber referensi yang relevan dalam bentuk materi atau contoh-contoh soal.
3. Menyelesaikan tugas mandiri sesuai bahan kajian sebagai berikut:
Tentukan integral-integral berikut:
 - a. $\int (15x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 2x + 1)dx$
 - b. $\int (3 - 2x)^{-2}dx$
 - c. $\int \frac{4x^2+26x+5}{2x^2+9x+4} dx$
4. Membuat resume Qs At Taubah ;11 dan Hadist: Abu Daud 1331

10. Daftar pustaka

- a. Al-Quran dan As-Sunnah
- b. Erwin Kreyszig, “*Advanced Engineering Mathematics*”, Edisi 6, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
- c. K.A Stroud, “*Matematika Teknik*”. Edisi 5 Jilid 1. Erlangga. 2003.
- d. Edwin J. Purcell Dale Varberg. ”Kalkulus Dan Geometri Analitis”. Edisi kelima. Erlangga 1987. Jakarta. Terjemah.