BAB 1
HIMPUNAN

Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari materi pada bab ini, maka diharapkan mahasiswa dapat memahami dan mengaplikasikan definisi dari himpunan, cara penyajian himpunan, kardinalitas, himpunan kosong, himpunan bagian (*subset*), himpunan yang sama, himpunan yang ekuivalen, himpunan saling lepas, himpunan kuasa, operasi himpunan, prinsip dualitas, prinsip inklusi dan eksklusi.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah diberikan penjelasan materi terkait definisi operasi biner, maka mahasiswa dapat:

1.1. Menjelaskan konsep dari himpunan
1.2. Mengaplikasikan cara penyajian himpunan, seperti: enumerasi, keanggotaan, simbol-simbol baku, notasi pembentuk himpunan, dan diagram venn.
1.3. Menentukan kardinalitas dari suatu himpunan.

1.4. Menjelaskan definisi dari himpunan kosong.

1.5. Menentukan himpunan bagian dari suatu himpunan.

1.6. Menentukan dua himpunan yang dikatakan sama.

1.7. Menentukan dua himpunan yang saling lepas.

1.8. Menentukan himpunan kuasa dari suatu himpunan.

1.9. Mengaplikasikan beberapa macam operasi himpunan, seperti: irisan (*intersection*), gabungan (*union*), komplemen (*complement*), selisih (*difference*), beda setangkup (*symmetric difference*).

1.10. Membuktikan sifat-sifat aljabar himpunan.

1.11. Membuktikan prinsip dualitas himpunan.

1.12. Memahami prinsip inklusi dan eksklusi.

Deskripsi Singkat:

Pada kegiatan belajar 1 dibahas konsep-konsep dasar dan sifat dari himpunan. Salah satu alat yang paling penting dalam kajian matematika modern adalah teori himpunan. Matematika modern dapat digambarkan sebagai kajian tentang himpunan yang dilengkapi dengan berbagai struktur, yang dikenal dengan istilah sistem matematika.

Setiap objek pada matematika modern pada akhirnya selalu kembali kepada kajian tentang himpunan.

1.1. Pengertian Himpunan

Himpunan diartikan sebagai kumpulan dari objek-objek yang dapat diterangkan dengan jelas. Himpunan dinotasikan dengan sebuah huruf kapital, sedangkan keanggotaannya dituliskan dengan huruf kecil. Misalkan A sebuah himpunan dan a adalah sebuah objek di A, dikatakan a adalah anggota dari A, dan dinotasikan oleh $a \in A$, dalam kasus a bukan anggota A dinotasikan oleh $a \notin A$.

1.2. Cara Penyajian Himpunan

1.2.1. Enumerasi

Enumerasi yaitu suatu himpunan yang dapat dinyatakan dengan menyebutkan semua anggotanya yang dituliskan dalam tanda kurung kurawal "{ }" dan di antara setiap anggotanya dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh 1:

a) Himpunan bilangan prima kurang dari 11, ditulis dengan: $A = \{2,3,5,7\}$

b) Himpunan 50 bilangan asli pertama, ditulis dengan: $\{1,2,3, \ldots ,50\}$

1.2.2. Keanggotaan

$a \in A$; a merupakan anggota himpunan A

$a \notin A$; a bukan merupakan anggota himpunan A

Contoh 2:

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$,

$C = \{\{\ \ \}\}$

maka

$3 \in A$

$5 \notin A$

$\{a, b, c\} \in B$

$c \notin B$

$\{\ \ \} \in C$

$\{\ \ \} \notin B$

Contoh 3:

Misalkan $A = \{a, b\}, B = \big\{\{a, b\}\big\},\ C = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in A$

$a \notin B$

$A \in B$

$A \notin C$

$B \in C$

1.2.3. Simbol-Simbol Baku

Penulisan himpunan yang sudah baku dikhususkan bagi himpunan yang telah baku dan sering digunakan dalam penjabaran matematika.

Contoh 4:

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{\ 1, 2, 3, \dots \}$

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{\ 1, 2, \dots\ \}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{\ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\ \}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

U = himpunan yang universal: **semesta**

1.2.4. Notasi Pembentuk Himpunan

Penulisan notasi:

$\{x|\ syarat\ yang\ harus\ dipenuhi\ oleh\ x\}$

Contoh 5:

B adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 10

$B = \{x|x \in P, x < 10\}$

yang ekuivalen dengan $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1.2.5. Diagram Venn

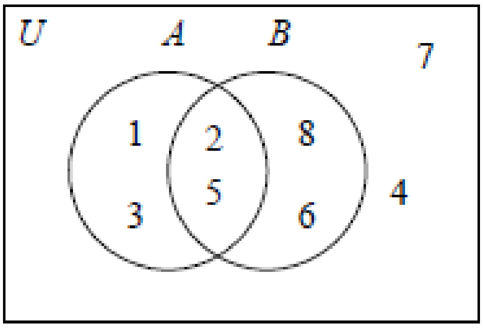
Diagram venn adalah cara lain untuk menyatakan suatu himpunan dengan gambar atau diagram. Diagram venn ini pertama kali ditemukan oleh ahli matematika berkebangsaan Inggris yang bernama **John Venn** (1834-1923).

Contoh 6:

Misalkan:

U = {1, 2, …, 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Buat Diagram Venn:



Gambar 1.1. Diagram Venn Contoh 6

1.3. Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinalitas dari himpunan A dan dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh 7:

$A = \{x | x\ bilangan\ bulat\ positif\ ganjil\ \ kecil\ dari\ 10\}$

atau $A = \{1,3,5,7,9\}$ maka $n(A) = 5$

1.4. Himpunan Kosong

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*) yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\quad\}$. Himpunan $\{\{\quad\}\}$ dapat juga ditulis dengan $\{\emptyset\}$. Himpunan $\{\{\quad\}, \{\{\quad\}\}\}$ dapat juga ditulis dengan $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Akan tetapi $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

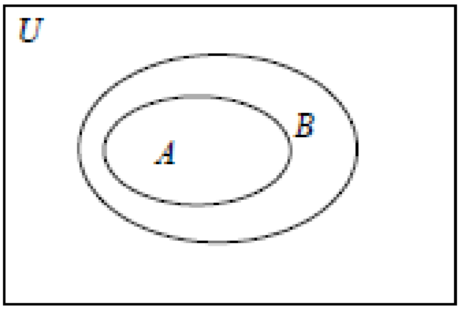
Contoh 8:

$B = \{buah\ yang\ rasanya\ asin\}$, maka $n(B) = 0$

$A = \{x | x\ akar\ persamaan\ kuadrat\ x^2 + 1 = 0\}$, maka $n(A) = 0$.

1.5. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A. Diagram Venn A himpunan bagian dari himpunan B yaitu:



Gambar 1.2. Himpunan Bagian (*Subset*)

Contoh 9:

a) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$

b) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

c) $N \subseteq Z \subseteq R \subseteq C$

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

Jika $A \subset B$ adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

Contoh 10:

$\{2\}$ dan $\{3,4\}$ adalah *proper subset* dari $\{2,3,4\}$

Sedangkan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Teorema 1.1.

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri $(A \subseteq A)$
b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A $(\emptyset \subseteq A)$
c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

1.6. Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A. Selanjutnya, $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$. Dinotasikan dengan $A = B \leftrightarrow A \subseteq B\ dan\ B \subseteq A$.

Contoh 11:

a) Jika $A = \{0,1\}$ dan $B = \{x|x(x-1) = 0\}$, maka $A = B$

b) Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{2,3,1\}$ maka $A = B$

c) Jika $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{2,3\}$ maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan $A, B,$ dan C berlaku aksioma berikut:

1) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

2) Jika $A = B$, maka $B = A$

3) Jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

1.7. Himpunan yang Ekuivalen

Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinalitas dari kedua himpunan tersebut sama. Dinotasikan dengan:

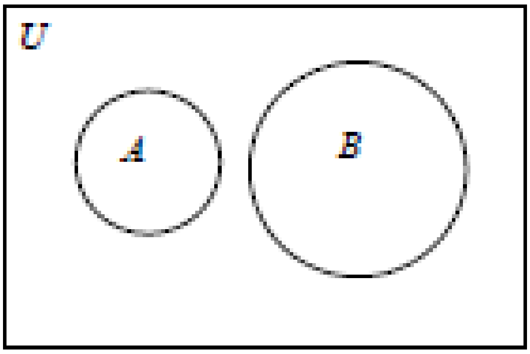
$$A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$$

Contoh 12:

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 5$

1.8. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. Dinotasikan $A \,//\, B$ dan dapat disajikan dengan diagram venn berikut:



Gambar 1.3. Himpunan Saling Lepas

Contoh 13:

Jika $A = \{x | x \in N, x < 7\}$ dan $B = \{7,8,9,10\}$, maka $A \mathbin{//} B$

1.8. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Dinotasikan dengan: $P(A)$ atau 2^A. Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$

Contoh 14:

Jika $A = \{1,2\}$, maka $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah:

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

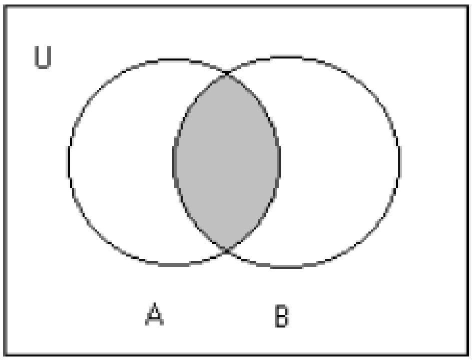
Himpunan kuasa dari $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1.9. Operasi Himpunan

1.9.1. Irisan (*intersection*)

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya berasal dari A yang juga menjadi anggota B. Dinotasikan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \; dan \; x \in B\}$

Diagram venn dari irisan sebagai berikut:



Gambar 1.4. Irisan (*intersection*)

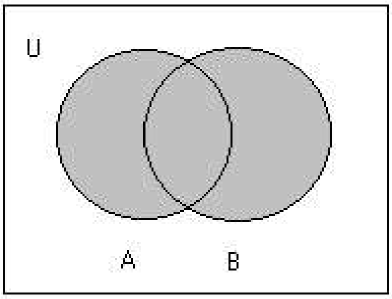
Contoh 15:

Jika $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $B = \{2,4,6,8,10\}$ maka $A \cap B = \{2,4,6\}$

1.9.2. Gabungan (*union*)

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya berasal dari A atau B atau keduanya. Dinotasikan dengan $A \cup B = \{x | x \in A \; atau \; x \in B\}$

Diagram Venn dari gabungan sebagai berikut:



Gambar 1.5. Gabungan (*union*)

Contoh 16:

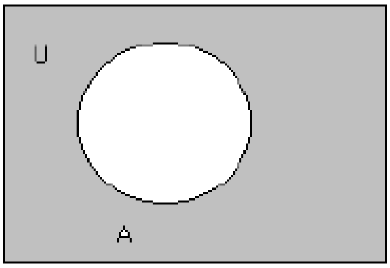
a) Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,4,5\}$,

maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

b) $A \cup \emptyset = A$

1.9.3. Komplemen (*complement*)

Komplemen dari himpunan A yang dimuat himpunan semesta U adalah himpunan anggota U yang tidak dimuat di A. Dinotasikan dengan: $A^C = \{x | x \in U, x \notin A\}$. Komplemen juga terkadang sering dinotasikan dengan A' atau $\bar{A}$.



Gambar 1.6. Komplemen (*complement*)

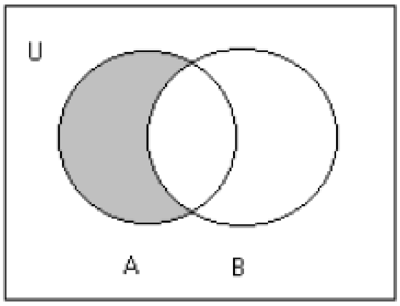
Contoh 17:

Misalkan $U = \{1,2,3, \ldots ,10\}$

Jika $A = \{2,4,5\}$, maka $A^C = \{1,3,6,7,8,9\}$

1.9.4. Selisih (*difference*)

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A tetapi bukan anggota himpunan B. Dinotasikan dengan $A - B = \{x|x \in A \; dan \; x \notin B\} = A \cap B^C$. Diagram venn disajikan sebagai berikut:



Gambar 1.7. Selisih (*Difference*)

Contoh 18:

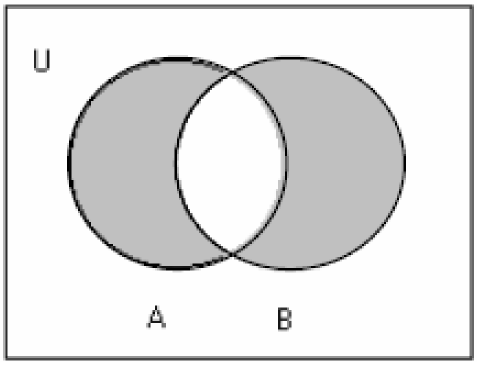
Jika $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dan $B = \{1,3,5,7,9\}$, maka $A - B = \{2,4,6,8\}$

Jika $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{1,2,3\}$, maka $A - B = \{5\}$ tetapi $B - A = \{2\}$

1.9.5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Beda setangkup (*Symmetric Difference*) A dan B dinotasikan dengan $A \oplus B$ adalah himpunan yang terdiri dari semua elemen di A atau di B tetapi tidak dalam keduanya. Jadi, $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cup (B - A)$ atau dapat juga dinotasikan dalam $A \oplus B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B \text{ dan } (x \notin A \cap B)\}$

Diagram venn dari beda setangkup dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 1.8. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Contoh 19:

Jika $A = \{2,4,6\}$ dan $B = \{2,3,5\}$,

maka $A \oplus B = \{2,3,4,5,6\} - \{2\} = \{3,4,5,6\}$

Contoh 20:

Misalkan:

U = Himpunan mahasiswa yang mengambil matakuliah Struktur Aljabar Grup

P = Himpunan mahasiswa yang memperoleh nilai UTS di atas 90

Q = Himpunan mahasiswa yang memperoleh nilai UAS di atas 90

Seorang mahasiswa memperoleh nilai A jika nilai UTS dan UAS keduanya di atas 90, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 90, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 90. Nyatakan semua nilai dengan notasi operasi himpunan!

1) Semua mahasiswa yang mendapat nilai $A = P \cap Q$
2) Semua mahasiswa yang mendapat nilai $B = P \oplus Q$
3) Semua mahasiswa yang mendapat nilai $C = U - (P \cup Q)$

Teorema 1.2.

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

1) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

1.10.Sifat-sifat Aljabar Himpunan

(a) Hukum Identitas:

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap U = A$

(b) Hukum *null* dominasi:

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U$

(c) Hukum Komplemen:

$A \cup A^C = U$

$A \cap A^C = \emptyset$

(d) Hukum Idempoten:

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(e) Hukum Involusi:

$(A^C)^C = A$

(f)Hukum Penyerapan (absorpsi):

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(g) Hukum Komutatif:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(h) Hukum Asosiatif:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(i) Hukum Distributif:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(j) Hukum De Morgan:

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(k) Hukum ${}^{0}/_{1}$

$(\emptyset)^C = U$

$(U)^C = \emptyset$

Contoh 21:

Buktikan hukum distributif dari:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Penyelesaian:

Misalkan $x \in A \cup (B \cap C)$ maka berlaku salah satu $x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$. Sekarang bila $x \in A$, akibatnya tentu saja $x \in (A \cup B)$ dan $x \in (A \cup C)$. Dengan demikian berlaku $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Di lain pihak, jika $x \in (B \cap C)$, maka $x \in B$ dengan demikian akibatnya $x \in (A \cup B)$. Dari $x \in C$, diperoleh $x \in (A \cup C)$. Dari kedua kondisi ini diperoleh $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Sebaliknya, misalkan $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Akibatnya berlaku kedua hal berikut $x \in (A \cup B)$ dan $x \in (A \cup C)$. Perhatikan bahwa kondisi $x \in (A \cup B)$ ekuivalen dengan $x \in A$ atau $x \in B$, pada saat yang bersamaan, kondisi $x \in (A \cup C)$ ekuivalen dengan $x \in A$ atau $x \in C$. Kedua kondisi ini mengakibatkan bahwa $x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$, jadi diperoleh bahwa:

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

Dengan demikian diperoleh bahwa:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

1.11.Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas berarti dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar. Prinsip dualitas pada himpunan, misal S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti ∪,∩, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mennganti ∪→∩, ∩→∪, $\emptyset \rightarrow U, U \rightarrow \emptyset$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

1) Hukum Identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2) Hukum *null* dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup U = U$
3) Hukum Komplemen: $A \cup A^C = U$	Dualnya: $A \cap A^C = \emptyset$
4) Hukum Idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5) Hukum Penyerapan (absorpsi): $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$

6) Hukum Komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7) Hukum Asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8) Hukum Distributif: $A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
9) Hukum De Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	Dualnya: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
10) Hukum $^0/_1$ $(\emptyset)^C = U$	Dualnya: $(U)^C = \emptyset$

Contoh 22:

Buktikan dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

dengan menggunakan hukum distributif:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A \cap (B \cup B^C)$$

dengan menggunakan hukum komplemen:

$$A \cap (B \cup B^C) = A \cap U$$

hukum *null* $A \cap U = A$

Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A$

1.12.Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Berkaitan dengan kardinalitas himpunan, diperoleh beberapa rumus sebagai berikut: Misalkan $|P|$ menyatakan kardinalitas himpunan P, dan $|Q|$ menyatakan kardinalitas himpunan Q, maka:

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$$

$$|P \cup Q| \leq |P| + |Q|$$

$$|P \cap Q| \leq \min(|P|, |Q|)$$

$$|P \oplus Q| = |P| + |Q| - 2|P \cap Q|$$

$$|P - Q| \geq |P| - |Q|$$

untuk 3 buah himpunan hingga, maka:

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$$

Secara umum untuk himpunan-himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kita peroleh:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup\ A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap\ A_n|$$

Contoh 23:

Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 51, yang habis dibagi 2, 5, atau 7.

Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 2 dan 5 tetapi tidak habis dibagi 7.

Penyelesaian:

Misalkan

P = Himpunan bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 2

Q = Himpunan bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 5

R = Himpunan bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 7

maka

$P = \{2,4,6,\ldots,50\} \rightarrow |P| = 25$

$Q = \{5,10,15,..,50\} \rightarrow |Q| = 10$

$R = \{7,14,21,..,49\} \rightarrow |R| = 7$

$P \cap Q = \{10,20,30,\ldots,50\} \rightarrow |P \cap Q| = 5$

$P \cap R = \{14,28,42\} \rightarrow |P \cap R| = 3$

$R \cap Q = \{35\} \rightarrow |R \cap Q| = 1$

$P \cap Q \cap R = \{\emptyset\} \rightarrow |P \cap Q \cap R| = 0$

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$$

$$= 25 + 10 + 7 - 5 - 3 - 1 + 0$$

$$= 33$$

Jadi, banyaknya bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 2 dan 5 tetapi tidak habis dibagi 7 adalah 33 bilangan.

Contoh 24:

Diantara 100 mahasiswa, 32 mahasiswa mempelajari matakuliah Kalkulus Integral, 20 mahasiswa mempelajari matakuliah Teori Bilangan, 45 mahasiswa mempelajari matakuliah Aljabar Linier, 15 mahasiswa mempelajari matakuliah Kalkulus Integral dan Teori Bilangan, 7 mahasiswa mempelajari matakuliah Kalkulus Integral dan Aljabar Linier, 10 mahasiswa mempelajari Teori Bilangan dan Aljabar Linier, dan 30 mahasiswa tidak mempelajari satupun diantara ketiga matakuliah tersebut. Hitunglah:

a. Banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga matakuliah tersebut.

b. Banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu diantara ketiga matakuliah tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan:

P = Himpunan mahasiswa yang mempelajari matakuliah Kalkulus Integral

Q = Himpunan mahasiswa yang mempelajari matakuliah Teori Bilangan

R = Himpunan mahasiswa yang mempelajari matakuliah Aljabar Linier

Jadi,

$|P| = 32, |Q| = 20, |R| = 45, |P \cap Q| = 15, |P \cap R| = 7,$

$|R \cap Q| = 10$

$|P \cup Q \cup R|^C = 30, |P \cup Q \cup R| = 70$

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$$

$$\begin{aligned} |P \cap Q \cap R| &= |P \cup Q \cup R| - |P| - |Q| - |R| + |P \cap Q| + |P \cap R| + |R \cap Q| \\ &= 70 - 32 - 20 - 45 + 15 + 7 + 10 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga matakuliah tersebut sebanyak 5 orang.

Banyaknya mahasiswa yang hanya memplejari matakuliah Kalkulus Integral adalah:

$|P| - |P \cap Q| - |P \cap R| + |P \cap Q \cap R|$

$= 32 - 15 - 7 + 5$

$= 15$ orang

Banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari natakuliah Teori Bilangan adalah:

$|Q| - |P \cap Q| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$

$= 20 - 15 - 10 + 5$

$= 0$ orang

Banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari matakuliah Aljabar Linier adalah:

$|R| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$

$= 45 - 7 - 10 + 5$

$= 33$ orang

Jadi, banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu diantara ketiga matakuliah tersebut adalah 48 orang.