ISOMORFISMA

Pada paket 12 ini, kita akan mempelajari metode formal untuk menentukan apakah dua grup yang didefinisikan dalam bentuk yang berbeda sesungguhnya adalah "sama". Kasus tersebut selanjutnya akan kita katakan terdapat isomorfisma antara dua grup tersebut. Notasi ini diperkenalkan pertama kali oleh Galois sekitar 1,5 abad lalu. Kata isomorfisma berasal dari bahasa Yunani *isos* yang berarti "sama" dan *morphe* yang berarti bentuk. R.Allenby memberikan pengertian penuh warna tentang seseorang yang mempelajari aljabar sebagai "orang yang tidak dapat mengatakan perbedaan di antara sistem yang isomorfik"[1].

Definisi: Suatu homomorfisma φ dari grup G into grup G* disebut **isomorfisma** jika φ merupakan pemetaan injektif (satu-satu) dan surjektif (onto) [2].
Jika terdapat suatu isomorfisma dari grup G onto grup G*, kita katakan G dan G* isomorfik dan dinotasikan dengan $G \approx G^*$.

Contoh-contoh:

1. Ambil grup $\langle R^+, \times \rangle$ yaitu grup multiplikatif dari himpunan semua bilangan real positif dan grup $\langle R, + \rangle$ yaitu grup aditif dari himpunan semua bilangan real.
   Suatu pemetaan $\tau : R^+ \rightarrow R$ sebagai berikut :
   $$\tau(a) = \log a$$
   Pada paket 11 telah dibuktikan bahwa τ merupakan homomorfisma dari R^+ into R. Untuk membuktikan apakah τ merupakan isomorfisma harus ditunjukkan terlebih dahulu apakah τ pemetaan injektif dan surjektif.
   Ambil sebarang $x, y \in R^+$ dengan $x \neq y$, maka
   $$\tau(x) = \log x \text{ dan } \tau(y) = \log y.$$
   Karena $x \neq y$ maka $\log x \neq \log y$. Hal ini berarti $\tau(x) \neq \tau(y)$.
   Jadi τ merupakan pemetaan injektif.

Apakah τ merupakan pemetaan surjektif?

Ambil sebarang $b \in R$. Andaikan $b = \log a$ maka $a = 10^b$.

Oleh karena untuk $b \in R$ maka $10^b \in R^+$ dengan kata lain $a \in R^+$.

Jadi $\forall\, b \in R\ \exists\, a = 10^b \in R^+$ sedemikian sehingga

$$\tau\,(a) = \tau\,(10^b) = \log 10^b = b$$

Terbukti bahwa τ merupakan pemetaan surjektif.

Karena τ merupakan homomorfisma dari R^+ into R dan merupakan pemetaan injektif dan surjektif maka τ merupakan isomorfisma dari R^+ into R.

2. Misalkan G grup semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan G' grup semua bilangan bulat genap dengan operasi penjumlahan. Didefinisikan pemetaan $\varphi: G \to G'$ dengan $\varphi\,(x) = 2x$.
   a. Akan dibuktikan φ merupakan homomorfisma dari G into G'. Ambil sebarang $x,y \in G$, maka

   $$\varphi\,(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y)$$

   Jadi φ homomorfisma dari G into G'.
   b. Akan dibuktikan φ pemetaan injektif.

   Ambil sebarang $x, y \in G$, maka $\varphi(x) = 2x$ dan $\varphi(y) = 2y$. Oleh karena

   $$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(y) \\ \Rightarrow 2x &= 2y \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

   maka φ merupakan pemetaan injektif.

c. Akan dibuktikan φ merupakan pemetaan surjektif.

Ambil sebarang $b \in G'$. Andaikan $b = 2a$ maka $a = \frac{b}{2}$.

Oleh karena untuk $b \in G'$ maka $\frac{b}{2} \in G$ dengan kata lain $a \in G$.

Jadi $\forall\, b \in G'\ \exists\, a = \frac{b}{2} \in G$ sedemikian sehingga

$$\varphi\,(a) = \varphi\left(\frac{b}{2}\right) = 2\left(\frac{b}{2}\right) = b$$

Terbukti bahwa φ merupakan pemetaan surjektif.

Karena φ merupakan homomorfisma dari G into G' dan merupakan pemetaan injektif dan surjektif maka φ merupakan isomorfisma dari G into G'.

3. Pada paket 10, kita telah menentukan anggota-anggota dari grup faktor Z/4Z, yaitu

$$Z/4Z = \{0 + 4Z, 1 + 4Z, 2 + 4Z, 3 + 4Z\}$$

Misalkan G adalah grup aditif dari Z/4Z dan G* adalah grup Z_4 terhadap operasi penjumlahan bilangan modulo 4. Daftar Caylenya dapat dilihat di bawah ini:

	0 + 4Z	1 + 4Z	2 + 4Z	3 + 4Z
0 + 4Z	0 + 4Z	1 + 4Z	2 + 4Z	3 + 4Z
1 + 4Z	1 + 4Z	2 + 4Z	3 + 4Z	0 + 4Z
2 + 4Z	2 + 4Z	3 + 4Z	0 + 4Z	1 + 4Z
3 + 4Z	3 + 4Z	0 + 4Z	1 + 4Z	2 + 4Z

dan

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Didefinisikan pemetaan f : $Z_4 \rightarrow Z/4Z$ sebagai berikut:

f(0) = 0 + 4Z

f(1) = 1 + 4Z

f(2) = 2 + 4Z

f(3) = 3 + 4Z

a. f homomorfisma dari Z_4 into Z/4Z

   $f(1 +_4 2) = f(3) = 3 + 4Z = (1 + 4Z) + (2 + 4Z) = f(1) + f(2)$

   Elemen yang lain dapat diselidiki seperti tersebut di atas.

b. f merupakan pemetaan injektif

   Ambil $1, 2 \in Z_4$, maka f(1) = 1 + 4Z dan f(2) = 2 + 4Z

   Tampak bahwa $1 \neq 2$ maka $f(1) \neq f(2)$

   Elemen yang lain dapat diselidiki seperti tersebut di atas

   Karena $\forall\ x, y \in Z_4, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ berarti f merupakan pemetaan injektif.

c. f merupakan pemetaan surjektif

Ambil misal $2 + 4Z \in Z/4Z$, maka ada $2 \in Z_4$ sedemikian sehingga $f(2) = 2 + 4Z$.

Elemen yang lain dapat diselidiki seperti tersebut di atas

Karena $\forall\ x \in Z/4Z\ \exists\ y \in Z_4$ sedemikian sehingga $f(y) = x$ berarti f merupakan pemetaan surjektif.

Karena f merupakan homomorfisma dari G into G* dan merupakan pemetaan injektif dan surjektif maka f merupakan isomorfisma dari G into G*. Dengan demikian $Z_4 \approx Z/4Z$.

Secara umum, untuk $n > 0$ dan misalkan $nZ = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \ldots\}$, maka Z_n dan Z/nZ isomorfik.

Definisi: Suatu isomorfisma dari suatu grup G onto dirinya sendiri disebut **automorfisma** dari G [3].

Contoh-contoh

1. Misalkan G grup bilangan real positif dengan operasi perkalian.
   Pemetaan $\varphi: G \to G$ didefinisikan dengan $\varphi(a) = a^2,\ \forall\ a \in G$
   φ merupakan homomorfisma, karena untuk setiap $a, b \in G$ berlaku
   $$\varphi(a \times b) = (a \times b)^2 = a^2 \times b^2 = \varphi(a) \times \varphi(b)$$
   φ merupakan pemetaan injektif, karena untuk setiap $a, b \in G$ berlaku
   $$a \neq b \text{ maka } a^2 \neq b^2 \text{ atau } \varphi(a) \neq \varphi(b)$$
   φ merupakan pemetaan surjektif, karena untuk setiap $a \in G$ tentu ada $b \in G$, yaitu $b = \sqrt{a}$ sedemikian sehingga
   $$\varphi(b) = \varphi(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^2 = a$$
   Jadi φ isomorfisma. Karena φ isomorfisma dari G into G maka φ merupakan automorfisma pada G.
2. Jika G grup bilangan real dengan operasi penjumlahan. Pemetaan φ didefinisikan sebagai
   $$\varphi: G \to G \text{ dengan } \varphi(x) = 2x,\ \forall\ x \in G$$
   φ merupakan homomorfisma, karena untuk setiap $a, b \in G$ berlaku
   $$\varphi(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = \varphi(a) + \varphi(b)$$
   φ merupakan pemetaan injektif, karena untuk setiap $a, b \in G$ berlaku
   $$a \neq b \text{ maka } 2a \neq 2b \text{ atau } \varphi(a) \neq \varphi(b)$$

---
[3] Ibid, 30

φ merupakan pemetaan surjektif, karena untuk setiap $a \in G$ tentu ada $b \in G$, yaitu $b = \frac{a}{2}$ sedemikian sehingga

$$\varphi(b) = \varphi(\frac{a}{2}) = 2(\frac{a}{2}) = a$$

Jadi φ isomorfisma. Karena φ isomorfisma dari G into G maka φ merupakan automorfisma pada G.

<u>Teorema 12.1</u>: Misalkan σ suatu automorfisma dari grup G, maka peta dari setiap subgrup normal dari G di bawah σ juga merupakan subgrup normal.

Bukti:
Misalkan σ automorfisma dari grup G dan H subgrup normal dari G.
Akan ditunjukkan bahwa $\sigma(H)$ juga subgrup normal dari G.
Pertama-tama, kita harus menunjukkan bahwa $\sigma(H)$ adalah subgrup dari G.
Ambil sebarang $a, b \in \sigma(H)$, maka

$$a = \sigma(h_1) \text{ dan } b = \sigma(h_2), \text{ untuk suatu } h_1, h_2 \in H$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a \in \sigma(H),\ b \in \sigma(H) &\Rightarrow a = \sigma(h_1) \text{ dan } b = \sigma(h_2), \text{ dengan } h_1, h_2 \in H \\ &\Rightarrow ab^{-1} = \sigma(h_1)(\sigma(h_2))^{-1} \\ &\Rightarrow ab^{-1} = \sigma(h_1)\,\sigma(h_2^{-1}) \\ &\Rightarrow ab^{-1} = \sigma(h_1h_2^{-1}) \end{aligned}$$

Di lain pihak, H adalah subgrup, sehingga

$$\begin{aligned} h_1 \in H, h_2 \in H &\Rightarrow h_1h_2^{-1} \in H \\ &\Rightarrow \sigma(h_1h_2^{-1}) \in \sigma(H) \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in \sigma(H) \end{aligned}$$

Jadi,

$$a \in \sigma(H), b \in \sigma(H) \Rightarrow ab^{-1} \in \sigma(H)$$

Terbukti bahwa $\sigma(H)$ adalah subgrup dari G.
Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $\sigma(H)$ normal di G.
Ambil sebarang $x \in G$ dan $a \in \sigma(H)$.
Oleh karena σ onto maka untuk $x \in G$ $\exists$ $y \in G$ sedemikian sehingga $\sigma(y) = x$.
Berdasarkan definisi $\sigma(H)$ maka

$$a \in \sigma(H) \Rightarrow a = \sigma(h) \text{ untuk semua } h \in H$$

Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
xax^{-1} &= \sigma(y)\,\sigma(h)\,(\sigma(y))^{-1} \\
&= \sigma(y)\,\sigma(h)\,(\sigma(y^{-1})) \\
&= \sigma(yhy^{-1})
\end{aligned}
$$

Tetapi H normal di G, maka

$$yhy^{-1} \in H,\ \forall\, y \in G \text{ dan } \forall\, h \in H$$

dan juga,

$$\sigma(yhy^{-1}) \in \sigma(H),\ \forall\, y \in G \text{ dan } \forall\, h \in H$$

Oleh karena itu,

$$xax^{-1} \in \sigma(H),\ \forall\, x = \sigma(y) \in G \text{ dan } \forall\, a = \sigma(h) \in \sigma(H)$$

atau

$$xax^{-1} \in \sigma(H),\ \forall\, x \in G \text{ dan } \forall\, a \in \sigma(H)$$

Terbukti bahwa σ (H) subgrup normal dari G.

Rangkuman

1. Suatu homomorfisma φ dari grup G into grup G* disebut isomorfisma jika φ merupakan pemetaan injektif (satu-satu) dan surjektif (onto).
2. Jika terdapat suatu isomorfisma dari grup G onto grup G*, kita katakan G dan G* isomorfik dan dinotasikan dengan $G \approx G^*$.
3. Suatu isomorfisma dari suatu grup G onto dirinya sendiri disebut automorfisma dari G.

Latihan Soal

Selesaikan soal berikut!

Misalkan G suatu grup. Buktikan bahwa pemetaan $\varphi(g) = g^{-1}$, $\forall\, g \in G$ adalah automorfisma jika dan hanya jika G abelian.