# Aljabar Linear

## *Pengantar Sistem Persamaan Linear*

Nur Hasanah Syarief, M.Pd

# Tujuan Pembelajaraan:

Melalui pembelajaran daring, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan konsep persamaan linear dan sistem persamaan linear
2. Menuliskan bentuk persamaan linear dan susunannya
3. Menghitung solusi sistem persamaan linear menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE)

# Persamaan Linear

## Apa itu Persamaan Linear?

# Persamaan Linear

Sebuah garis yang terletak pada bidang $xy$ dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

Dimana $a_1, a_2,$ dan $b$ merupakan konstanta real dan $a_1$ dan $a_2$ tidak keduanya nol. Persamaan semacam ini disebut persamaan linear dengan variabel x dan y.

Secara umum kita mendefinisikan persamaan linear (*linear equation*) dengan $n$ variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1, a_2, \dots, a_n,$ dan $b$ merupakan konstanta.

**Contoh Persamaan Linear:**

Persamaan – Persamaan

$$x + 3y = 7$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3z + 1,$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

Adalah persamaan-persamaan Linear.

Persamaan-persamaan

$$x + 3\sqrt{y} = 5$$

$$3x + 2y - z + xz = 4 \quad dan$$

$$y = \sin x$$

Bukan merupakan persamaan linear.

**Note:** Persamaan linear tidak mengandung hasil kali atau akar dari variabel. Seluruh variabel yang ada hanya dalam bentuk pangkat satu dan bukan merupakan argumen dari fungsi-fungsi trigonometri, logaritma, atau eksponensial.

Solusi dari persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ adalah suatu urutan dari $n$ bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sedemikian rupa sehingga persamaan tersebut akan terpenuhi jika kita menggantikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots x_n = s_n$. Kumpulan semua solusi dan persamaan itu disebut **himpunan solusi (*solution set*) atau solusi umum (*general solution*)** dari persamaan tersebut.

**Contoh 2: Mencari Himpunan Solusi**

Tentukan himpunan solusi untuk

a) $4x - 2y = 1$

*b)* $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$

Penyelesaian:

a) Untuk mencari solusi, Kita dapat menetapkan nilai sebarang untuk $x$ dan menyelesaikan persamaan untuk memperoleh $y$ atau kita menetapkan nilai sebarang untuk $y$ dan menyelesaikan persamaan untuk memperoleh $x$.

Misal $x = t$ maka

$$4t - 2y = 1$$
$$-2y = 1 - 4t$$
$$y = 2t - \frac{1}{2}$$

Jika $t = 3$ maka $y = 2(3) - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

Misal $y = t$ maka

$$4x - 2t = 1$$
$$4x = 2t - 1$$
$$x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$$

a) Untuk mencari solusi kita dapat menetapkan nilai sebarang dua variable dan menyelesaikan persamaan tersebut untuk variable ketiga. Misal, jika kita menetapkan nilai sebarang $s$ dan $t$, berturut-turut untuk $x_2$ dan $x_3$ dan menyelesaikan $x_1$maka kita peroleh

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

# Sistem Persamaan Linear

Himpunan terbatas dari persamaan linear dalam variable $x_1, x_2 \dots, x_3$ disebut **sistem persamaan linear atau sistem linear**.

Secara umum, sistem linear dari $m$ persamaan dengan variable $n$ tak diketahui dapat ditulis sebagai:

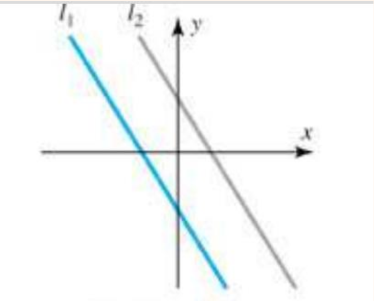
$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Dimana $x_1, x_2 \dots, x_n$ merupakan variable dan $a$ dan $b$ merupakan konstanta.

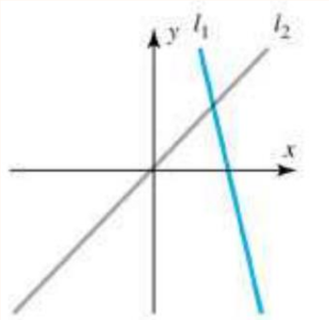
Urutan sejumlah bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ merupakan solusi dari sistem persamaan linear jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ merupakan solusi dari setiap persamaan di dalam sistem tersebut.

***Suatu sistem persamaan Linear dapat tidak memiliki solusi, memiliki tepat satu solusi atau memiliki tak hingga banyak solusi.***

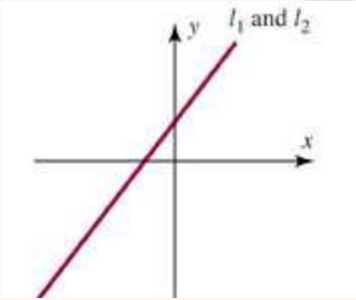
Suatu sistem persamaan yang tidak memiliki solusi disebut **tidak konsisten (inconsistent)**, Sedangkan jika terdapat paling tidak satu solusi dalam sistem disebut **konsisten**.




**Tidak Punya Solusi**




**Memiliki satu solusi**




**Memiliki Tak Hingga Solusi**

1. Garis $l_1$ dan $l_2$ mungkin sejajar, yang berarti kedua garis tidak berpotongan dan sebagai konsekuensinya sistem tidak memiliki solusi.
2. Garis $l_1$ dan $l_2$, mungkin berpotongan hanya pada 1 titik, yang berarti sistem hanya memiliki tepat satu solusi.
3. Garis $l_1$ dan $l_2$, mungkin berhimpitan, yang berarti jumlah titik potongnya tak terhingga dan sebagai konsekuensi terdapat tak terhingga banyaknya solusi untuk sistem tersebut.

**Contoh: Sistem Linear dengan satu Solusi**

Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$x - y = 1$$

$$2x + y = 6$$

Penyelesaian:

Eliminasikan variable $x$ dengan menambahkan $-2$ kali persamaan pertama dengan persamaan kedua. Sehingga menghasilkan

$$x - y = 1$$

$$3y = 4$$

Kita peroleh $y = 4/3$ . Subsitusikan nilai tersebut ke persamaan pertama $x = 1 + y = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$. Sehingga persamaan memiliki solusi Tunggal.

**Contoh: Sistem Linear dengan Tanpa Solusi**

Selesaikan sistem linear berikut:

$$x + y = 4$$

$$3x + 3y = 9$$

Penyelesaian:

Eliminasikan variable $x$ dengan menambahkan $-3$ kali persamaan pertama dengan persamaan kedua. Sehingga menghasilkan

$$x + y = 4$$

$$0 = -3$$

Persamaan kedua inkonsisten, jasi sistem persamaan yang diberikan tidak memiliki solusi.

**Contoh: Sistem Linear dengan solusi tak hingga**

Selesaikan sistem linear berikut:

$$2x - 4y = 1$$

$$8x - 16y = 4$$

Eliminasi variable $x$ dengan menambahkan $-4$ kali persamaan pertama dengan persamaan kedua. Sehingga menghasilkan

$$2x - 4y = 1$$

$$0 = 0$$

Dengan demikian

$$x = \frac{1}{2} + 2y$$

Misalkan $y = t$ maka $x = \frac{1}{2} + 2t$

Dari bentuk tersebut kita memperoleh banyak solusi secara spesifik dari persamaan ini dengan mensubtitusi nilai-nilai untuk paramaternya. Contoh: $t = 0$ maka $x = \frac{1}{2}, t = 1$ maka $x = 5/2$.

# Matriks yang di Perbesar

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

**Contoh:**

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

**Catatan:** Ketika menyusun suatu matriks yang diperbesar, factor-faktor yang tidak diketahui harus di tulis dengan urutan yang sama untuk setiap persamaan dan konstanta harus berada pada bagian paling kanan.

# Operasi Baris Elementer

Langkah-Langkah Operasi Baris Elementer

1. Kalikan baris dengan konstanta bukan nol.
2. Tukar dua baris.
3. Kalikan sebuah konstanta ke satu baris dan tambahkan ke baris lainnya.

**Contoh: Menggunakan Operasi Baris Elementer**

Pada kolom sebelah kiri, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan linier dengan mengoperasikan persamaan dalam sistem, dan kolom sebelah kanan, kita menyelesaikan sistem yang sama dengan operasi pada baris dari matriks perluasan

| | |
|---|---|
| $x + y + 2z = 9$<br>$2x + 4y - 3z = 1$<br>$3x + 6y - 5z = 0$ | $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ |
| Ditambahkan $-2$ kali persamaan pertama dengan persamaan kedua diperoleh<br>$x + y + 2z = 9$<br>$2y - 7z = 17$<br>$3x + 6y - 5z = 0$ | Ditambahkan $-2$ kali persamaan pertama dengan persamaan kedua diperoleh<br>$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ |
| Ditambahkan $-3$ kali persamaan pertama dengan persamaan Ketika, diperoleh<br>$x + y + 2z = 9$<br>$2y - 7z = 17$<br>$3y - 11z = -27$ | Ditambahkan $-3$ kali persamaan pertama dengan persamaan Ketika, diperoleh<br>$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| Kalikan persamaan kedua dengan $1/2$ diperoleh<br>$x + y + 2z = 9$<br>$y - \frac{7}{2}z = \frac{17}{2}$<br>$3y - 11z = -27$ | Kalikan persamaan kedua dengan $1/2$ diperoleh<br>$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$ |
| Tambahkan $-3$ kali persamaan kedua ke persamaan ketiga, diperoleh<br>$x + y + 2z = 9$<br>$y - \frac{7}{2}z = \frac{17}{2}$<br>$-\frac{1}{2}z = -3/2$ | Tambahkan $-3$ kali persamaan kedua ke persamaan ketiga, diperoleh<br>$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$ |
| Kalikan persamaan ketiga dengan $-2$ diperoleh<br>$x + y + 2z = 9$<br>$y - \frac{7}{2}z = \frac{17}{2}$<br>$z = 3$ | Kalikan persamaan ketiga dengan $-2$ diperoleh<br>$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ |

Tambahkan $-1$ kali persamaan kedua ke persamaan pertama, diperoleh

$$x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2}$$

$$y - \frac{7}{2}z = \frac{17}{2}$$

$$z = 3$$

Tambahkan $-1$ kali persamaan kedua ke persamaan pertama, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan pertama, dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan kedua diperoleh

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Solusinya adalah $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$

Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan pertama, dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan kedua diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Thanks!

**Do you have any questions?**