Pembelajaran Daring Kolaboratif
2023

ALJABAR LINEAR

Matriks dan Operasi Matriks

Nur Hasanah Syarief, M.Pd

Definisi

Matriks adalah susunan angka/bilangan dalam bentuk persegi panjang. Bilangan/angka dalam susunan tersebut disebut entri.

- Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya
- Kita akan menggunakan huruf besar untuk menunjukkan matriks dan huruf kecil untuk menunjukkan jumlah numerik
- Entri yang terletak di baris i dan kolom j dari matriks A akan dilambangkan dengan a_{ij} atau $(A)_{ij}$

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ atau C= $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Matriks 3×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan matriks umum $m \times n$ sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika kita menginginkan notasi yang singkat, maka matriks diatas dapat ditulis sebagai

$$[a_{ij}]_{m \times n} \; atau \; [a_{ij}]$$

Jenis-jenis Matriks

Pembelajaran Daring Kolaboratif
2023

Matriks Baris

Matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut **matriks baris (Vektor baris)**
Matriks baris dinotasikan dengan matriks $1 \times n$ dan ditulis sebagai

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

Contoh:

$$A = [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3]$$

Matriks Kolom

Matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut **matriks kolom (Vektor kolom)**
Matriks kolom dinotasikan dengan matriks $m \times 1$ dan ditulis sebagai

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriks Bujursangkar/Persegi

Matriks dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n **disebut matriks bujursangkar ordo n**
Matriks bujur sangkar dinotasikan dengan matriks $n \times n$ dan ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

entri $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut **diagonal utama**

Contoh: Matriks 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Direktorat Pembelajaran dan Kemahasiswaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset, dan Teknologi
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi

Operasi pada Matriks

Pembelajaran Daring Kolaboratif
2023

Kesetaraan Matriks

Definisi:
Dua matriks adalah **setara (equal)** jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama.
Dalam notasi matriks jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ atau $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $x = 5$, maka $A = B$, tetapi untuk semua nilai x yang lain Matrika A dan B tidak setara.
$B \neq C$ karena ukuran yang berbeda dan entri-entrinya tidak bersesuaian.

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Definisi:
Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka **jumlah (sum)** A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan **selisih (difference)** A - B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Dan

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh:

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Pernyataan $A + C, B + C, A - C$ dan $B - C$ tidak terdefinisi.

Kelipatan Skalar

Definisi:
Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkali-nya (product) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai **kelipatan skalar (scalar multiple)** dari A.
Dalam notasi matriks jika $A = [a_{ij}]$, maka

Contoh:
Untuk matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Maka

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Hasil Kali Matriks

Definisi:
Jika A adalah matriks $m \; x \; r$ dan B adalah matriks $rx \; n$ maka hasilkali (product) AB adalah matriks $m \; x \; n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Secara umum, jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times r$, dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $r \times n$, maka

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

Contoh:

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$
$(1 \cdot 1) + (2 \cdot -1) + (4 \cdot 7) = 27$
$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) = 30$
$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$
$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) = 8$
$(2 \cdot 1) + (6 \cdot -1) + (0 \cdot 7) = -4$
$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$
$(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 12$

Matriks yang Dipartisi

Sebuah matriks dapat dibagi atau di partisi menjadi beberapa matriks yang lebih kecil dengan cara menyisipkan garis-garis horizontal dan vertikal diantara baris dan kolom yang diinginkan.

Ada tiga kemungkinan matriks pertisi yang dapat dibuat untuk suatu matriks umum A, ukuran 3×4

- Pertisi A menjadi 4 submatriks $A_{11}, A_{12}, A_{21}, dan\ A_{22}$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- Pertisi matriks A menjadi matriks-matriks baris r_1, r_2 $,\ dan\ r_3$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

- Pertisi matriks A menjadi matriks-matriks kolom c_1, c_2, c_3 dan c_4.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks dengan Kolom dan dengan Baris

Matriks kolom ke-j dari AB = A[matriks kolom ke-j dari B]

$$AB = A[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \cdots \quad Ab_n]$$

Matriks baris ke-i dari AB = [matriks kolom ke-i dari A]B

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks Kolom ke-2 dari AB

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Matriks baris ke-1 dari AB

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

Kombinasi Linear

Definisi:
Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah scalar, maka pernyataan berbentuk

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$$

Disebut kombinasi linear dari $A_1, A_2, \dots A_n$ dengan koefisien $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2A - B + \frac{1}{3}C = 2A + (-B) + \frac{1}{3}C$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Adalah kombinasi linear dari A, B, dan C dengan koefisien-koefisien scalar 2, -1, 1/3

Hasilkali Matriks sebagai Kombinasi Linear

Pembelajaran Daring Kolaboratif 2023

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks kolom AB dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari matriks-matriks kolom A sebagai berikut:

$$4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}, \qquad 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Bentuk Matriks dari suatu Sistem Linear

Berikut sistem yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dua matriks dikatakan setara jika entri-entri yang bersesuai setara sehingga

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Transpos suatu Matriks

Definisi:

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A (transpose of A), dinyataka dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dan A, dan seterusnya.

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Matriks Diagonal

Pembelajaran Daring Kolaboratif
2023

Definisi:
Suatu matriks bujursangkar yang samua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut **matriks diagonal.**
Suatu matriks diagonal umum D, $n \times n$ dapat ditulis sebagai

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal memiliki invers jika dan hanya jika seluruh entrinya pada posisi diagonal adalah bilangan taknol. Inver dari matriks diagonal sebagai berikut:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Pangkat dari matriks diagonal sebagai berikut

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Maka

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A^5 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

Hasilkali matriks yang melibatkan factor diagonal sangatlah mudah untuk dihitung.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{21} & d_3a_{31} \\ d_1a_{12} & d_2a_{22} & d_3a_{32} \\ d_1a_{13} & d_2a_{23} & d_3a_{33} \\ d_1a_{14} & d_2a_{24} & d_3a_{34} \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga

Definisi:
Matriks bujursangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya nol disebut **matriks segitiga bawah** dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya nol disebut **matriks segitiga atas**. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau seditiga atas disebut **matriks segitiga**.

Contoh:

Matriks segitiga atas $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$

Matriks segitiga bawah $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Teorema

a) Transpos dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga atas, dan transpos dari matriks segitiga atas adalah matriks segitiga bawah.
b) Hasilkali dari matriks-matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah, dan hasilkali dari matriks-matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas.
c) Suatu matriks segitiga dapat dibalik jika dan hanya jika entri-entri pada diagonalnya semuanya bilangan taknol.
d) Invers dari matriks segitiga bawah yang dapat dibalik adalah matriks segitiga bawah, dan invers dari matriks segitiga atas yang dapat dibalik adalah matriks segitiga atas.

Matriks Simetrik

Definisi:
Suatu matriks bujursangkar A adalah simetrik jika $A = A^T$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah scalar sebarang, maka:

a) A^T adalah simetrik
b) $A + B$ dan $A - B$ adalah simetrik
c) kA adalah simetrik

Teorema

Jika A adalah matriks simetrik yang dapat dibalik, maka A^{-1} adalah simetrik

Hasilkali AA^T dan A^TA

Jika A adalah matriks $\mathrm{m} \times n$, maka A^T adalah matriks $n \times m$ sehingga hasilkali AA^T dan A^TA keduanya adalah matriks bujursangkar. matriks AA^T memiliki ukuran $m \times m$ dan matriks A^TA memiliki ukuran $\mathrm{n} \times n$. Hasilkali semacam ini selalu simetrik karena

$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$ dan $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$

Contoh:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Maka

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Thanks!

Do you have any questions?