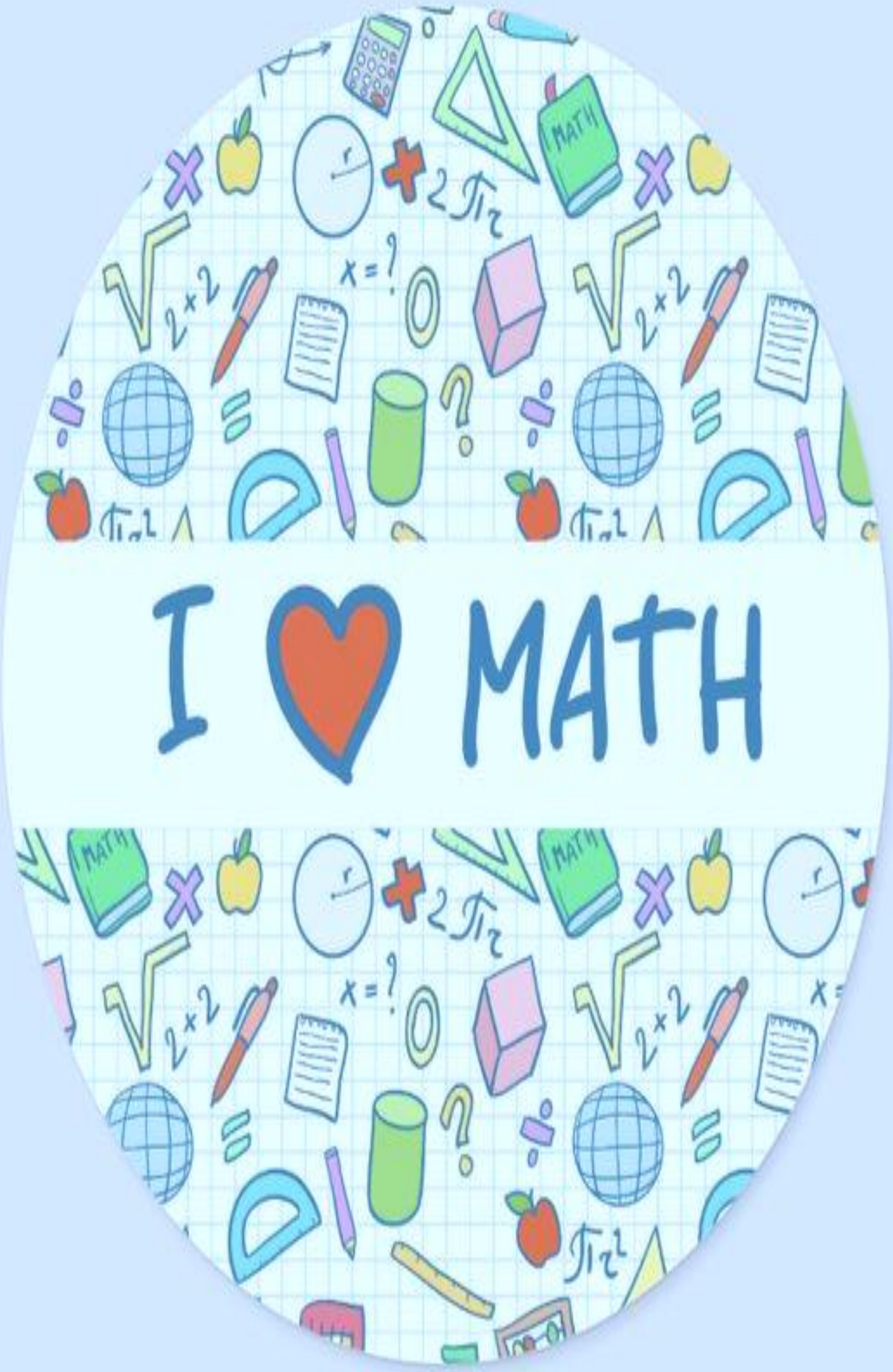


ALJABAR LINEAR

- Invers; Aturan Aritmetika Matriks
- Matriks Elementer & Metode untuk Mencari A^{-1}
- Hasil-Hasil Selanjutnya Mengenai Sistem Persamaan dan Keterbalikan

Maria Martini Aba, S.Pd.,M.Pd

Prodi Pendidikan Matematika

FKIP Universitas Muhammadiyah Kupang

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu menjelaskan subbahasan Invers; Aturan Aritmatika Matriks, Matriks Elementer dan Metode untuk Mencari A^{-1}, Sistem Persamaan dan Keterbalikan.
2. Mampu menunjukkan contoh-contoh sebagai pembuktian dari teorema-teorema terkait dengan Invers; Aturan Aritmatika Matriks, Matriks Elementer dan Metode untuk Mencari A^{-1}, Sistem Persamaan dan Keterbalikan.
3. Mampu Invers; Aturan Aritmatika Matriks, Matriks Elementer dan Metode untuk Mencari A^{-1}, Hasil-hasil selanjutnya mengenai Sistem Persamaan dan Keterbalikan.

Apakah masih ingat bagaimana perkalian matriks dan syaratnya ??

$$A_{m\times n} \times B_{n\times r} = AB_{m\times r}$$

1. INVERS; ATURAN ARITMETIKA MATRIKS

Teorema 1.4.1 Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan, maka aturan-aturan aritmatika berikut ini adalah valid.

a) $A + B = B + A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)
c) $A(BC) = (AB)C$ (hukum asosiatif untuk perkalian)
d) $A(B + C) = AB + AC$ (Hukum distributif kiri)
e) $(B + C)A = BA + CA$ (Hukum distributif kanan)
f) $A(B - C) = AB - AC$
g) $(B - C)A = BA - CA$
h) $a(B + C) = aB + aC$
i) $a(B - C) = aB - aC$
j) $(a + b)C = aC + bC$
k) $(a - b)C = aC - bC$
l) $a(bC) = (ab)C$
m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Matriks-Matriks Nol

Sebuah matriks, yang semua entrinya nol,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.4.2. *Dengan menganggap ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan, aturan-aturan aritmetika matriks berikut ini adalah valid.*

(a) $A + 0 = 0 + A = A$
(b) $A - A = 0$
(c) $0 - A = -A$
(d) $A0 = 0; \quad 0A = 0$

Matriks – Matriks Identitas

Matriks-matriks bujur sangkar dengan 1 pada diagonal utamanya dan 0 untuk entri selain diagonal utamanya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas dinyatakan dengan ***I***

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka $AI_n = A\ dan\ I_m A = A$

Teorema 1.4.3 Jika R adalah sebuah $n \times n$ dari matriks A berbentuk eselon baris tereduksi, maka R mempunyai sebuah baris nol atau R merupakan matriks identitas.

Konsep Invers dalam Aljabar Linear

1. **Pengertian Invers**

   Invers dari suatu matriks merupakan matriks yang ketika dikalikan dengan matriks awal akan menghasilkan matriks identitas.

2. **Keberadaan Invers**

   Setiap matriks persegi yang non-singular memiliki invers. Matriks singular tidak memiliki invers.

3. **Manfaat Invers**

   Invers matriks sering digunakan dalam pemecahan sistem persamaan linear dan analisis transformasi linier.

Invers dari sebuah Matriks

Definisi. Jika ***A*** adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks ***B*** yang berukuran sama dapat ditentukan sedemikian sehingga ***AB* = *BA* = *I***, maka ***A*** disebut **dapat dibalik** dan *B* disebut **invers** dari **A**.

Contoh 5 Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{adalah invers dari} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Sifat-Sifat Invers

Teorema 1.4.4. Jika B dan C keduanya adalah invers matriks A, maka B = C

Teorema 1.4.4 menunjukkan bahwa suatu matriks yang dapat dibalik tidak mempunyai lebih dari satu invers.

Jika A dapat dibalik maka inversnya dinyatakan dengan A^{-1}.

Sehingga, $AA^{-1} = I \; dan \; A^{-1}A = I$

Teorema 1.4.5 Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya dapat dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - ac} \\ -\dfrac{c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Teorema 1.4.6. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama, maka :

(a) AB dapat dibalik

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

"Suatu hasil kali berapa pun banyaknya matriks yang dapat dibalik adalah matriks yang dapat dibalik, dan invers dari hasil kali tersebut adalah hasil kali invers-inversnya dalam urutan yang terbalik"

Contoh 7 Tinjau matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan menerapkan rumus pada Teorema 1.4.5, kita peroleh

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Selain itu,

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ sebagaimana yang dijamin oleh Teorema 1.4.6. ▲

Pangkat suatu Matriks

Definisi Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka kita definisikan pangkat bulat tak negatif dari A sebagai

$$A^0 = I \qquad A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ faktor}} \qquad (n > 0)$$

Lebih jauh, jika A dapat dibalik, maka kita definisikan pangkat bulat negatif sebagai

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Karena definisi ini paralel dengan definisi untuk bilangan real, hukum pangkat yang biasa juga berlaku.

Teorema 1.4.7. Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, r dan s adalah bilangan bulat, maka

$$A^r A^s = A^{r+s} \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

Teorema berikut memberikan beberapa sifat berguna dari pangkat negative.

Teorema 1.4.8. Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka :

a) A^{-1} *dapat dibalik dan* $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $A^{n} =$ *dapat dibalik dan* $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ untuk n = 0, 1, 2, …

c) *Untuk sembarang skalar tak nol* k*, matriks* kA *dapat dibalik dan*

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

Contoh 8 Anggap A dan A^{-1} adalah seperti dalam Contoh 7, yaitu,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^{3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^{3} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Matriks-Matriks yang Melibatkan Ungkapan Polinomial

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, katakanlah $m \times m$, dan jika

$$p(A) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (1)$$

adalah sembarang polynomial, maka kita mendefinisikan

$$p(A) = a_o I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

Dengan I adalah matriks identitas $m \times m$. Dengan kata-kata, *p(A)* adalah matriks $m \times m$ yang dihasilkan ketika A disubtitusikan untuk x dalam (1) dan a_o digantikan oleh $a_o I$

Contoh 9 Jika

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \qquad \text{dan} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

maka

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \quad \blacktriangle$$

Sifat-Sifat Transpos

Berikut adalah teorema yang mendeskripsikan sifat-sifat utama dari operasi transpos.

Teorema 1.4.9. Jika ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang dinyatakan dapat dilakukan, maka

a) $((A)^T)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

c) $(kA)^T = kA^T$ *dengan k adalah sembarang skalar*

d) $(AB)^T = B^T A^T$

Ingat transpos suatu matriks adalah dengan menukar baris-baris dan kolom-kolomnya.

“Transpos dari hasil kali beberapa matriks sama dengan hasil kali transpos-transposnya dalam urutan yang terbalik”

Keterbalikan suatu Transpos

Teorema 1.4.10.
Jika A adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka A^T juga dapat dibalik dan $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Teorema 1.4.10 ini menetapkan hubungan antara invers suatu matriks yang dapat dibalik dan invers dari transposnya.

Kita dapat membuktikan invers atau keterbalikan dari A^T dan mendapatkan rumus diteorema 4 adalah dengan menunjukkan :

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1})^T(A^T) = I$$

Namun, dari Teorema 1.4.9 bagian d) dan fakta bahwa $I^T = I$ kita mendapatkan :

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T(A^T) = (AA^{-1})^T = I$$

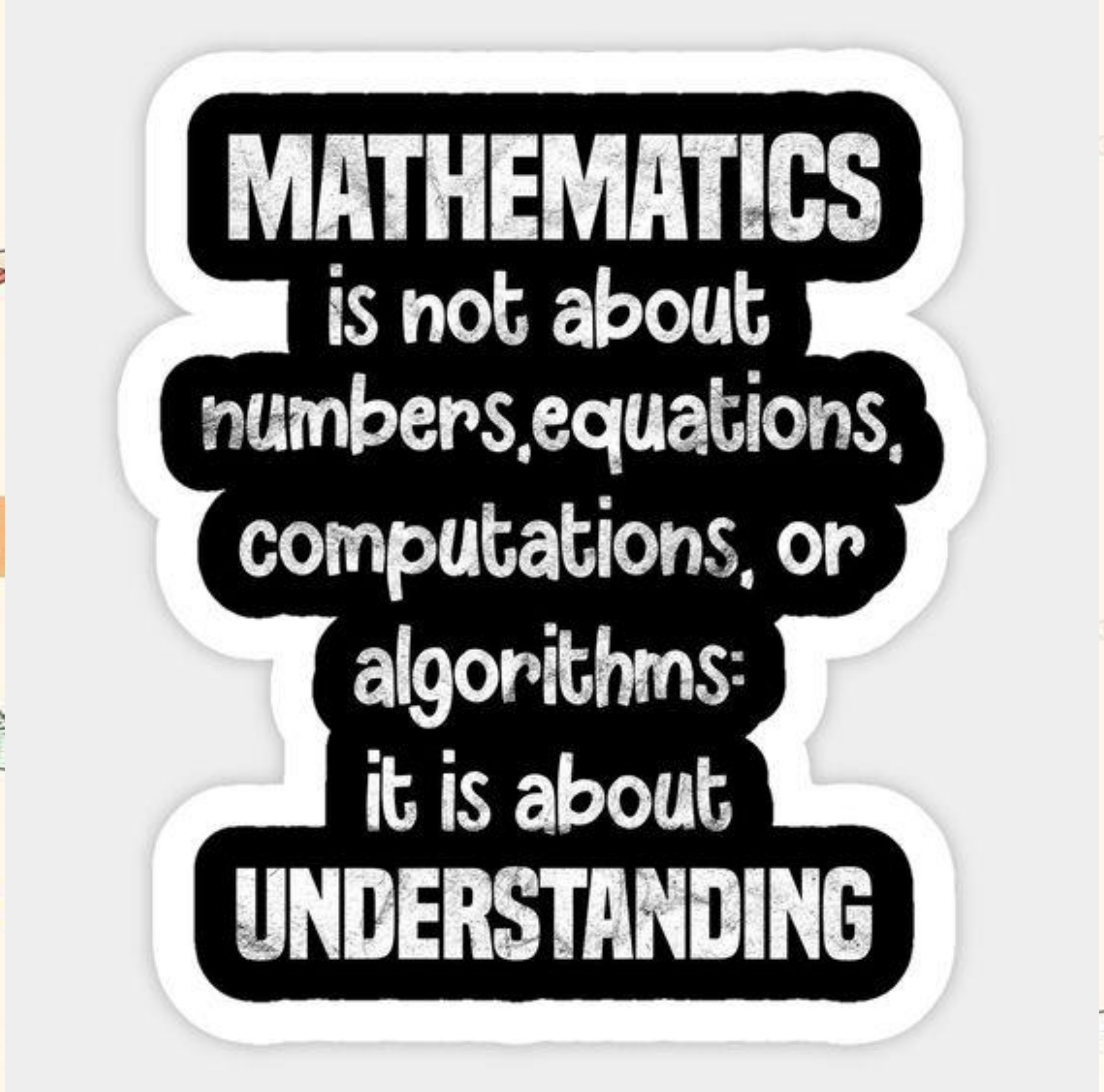
Contoh 10 Tinjau matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Penerapan Teorema 1.4.5 menghasilkan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Seperti yang dijamin oleh Teorema 1.4.10, matriks-matriks ini memenuhi (4). ▲


MATHEMATICS
is not about
numbers, equations,
computations, or
algorithms:
it is about
UNDERSTANDING


Thank you