PEMBELAJARAN DARING KOLABORATIF

Aljabar Linear

Ekspansi Kofaktor dan Aturan Cramer

Netty J M Gella, M.Si

Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor dan Aturan Crammer

Tujuan pembelajaran:

a) Mahasiswa mampu menghitung determinan menggunakan ekspansi kofaktor dan menyelesaiakn SPL dengan metode cramer
b) Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan matriks

PEMBELAJARAN DARING KOLABORATIF

1

Ekspansi Kofaktor

Salah satu cara untuk menentukan determinan dari matriks persegi/bujur sangkar berordo $n \times n$

PEMBELAJARAN DARING KOLABORATIF

Determinan Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah suatu matriks persegi berordo $n \times n$ maka

i. Minor dari elemen/entri a_{ij} atau minor$-ij$ (M_{ij}) yaitu **determinan matriks** yang diperoleh **setelah menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$** matriks A.

ii. Kofaktor dari elemen/entri a_{ij} atau kofaktor $-ij$ (C_{ij}) yaitu $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$

Contoh 1

Diberikan matriks persegi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka tentukan C_{11} dan C_{32}

Penyelesaian

- **Untuk menentukan C_{11} artinya mencari kofactor dari a_{11}**

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *Ambil elemen a_{11}, hilangkan baris ke -1 dan kolom ke-1*

Minor dari elemen a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Kofaktor dari a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{22}(a_{33}) - a_{32}(a_{23}) = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

Lanjutan Penyelesaian Contoh 1

Untuk menentukan C_{32} artinya mencari kofaktor dari a_{32}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix}$$ *Ambil elemen a_{32}, hilangkan baris ke -3 dan kolom ke-2*

Minor dari elemen a_{32} adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Kofaktor dari a_{32} adalah $C_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = (-1)^{5} M_{32} = -M_{32} =$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -[a_{11}(a_{23}) - a_{21}(a_{13})] = -a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}$$

Determinan Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Secara umum, misalkan sebuah matriks persegi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

maka cara menghitung determinan matriks A dengan ekspansi kofaktor adalah sebagai berikut,

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-k$:

$$\det(A) = a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-l$:

$$\det(A) = a_{1l}\,C_{1l} + a_{2l}\,C_{2l} + \cdots + a_{nl}\,C_{nl} = \sum_{i=1}^{n} a_{il}C_{il}$$

Catatan

Agar **perhitungannya lebih mudah** sebaiknya determinan diekspansikan ke baris atau ke kolom yang **memuat elemen-elemen bilangan nol sebanyak-banyaknya**.

Contoh 2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan determinan A melalui

a. Ekspansi baris kedua
b. Ekpansi kolom pertama

Penyelesaian

Matriks A berordo 3×3 $(\mathrm{n} = 3)$

a. Determinan A melalui ekspansi baris kedua ($k = 2$)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}C_{2j} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$= (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-1)^3\,[(2)(-1) - (5)(3)] + 0 + 1(-1)^5[(1(5) - 4(2)]$$

$$= (-2)(-1)[-2 - 15] + 1(-1)[5 - 8]$$

$$= 2(-17) + (-1)(-3) = -34 + 3 = -31$$

Contoh 2

b. Determinan A melalui ekspansi kolom pertama ($l = 1$)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}C_{i1} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-1)^2\,[(0)(-1) - (5)(1)] + (-2)(-1)^3[2(-1) - 5(3)]$$

$$+ 4(-1)^4[(2(1) - 0(3))]$$

$$= (1)(1)[0 - 5] + (-2)(-1)[-2 - 15] + 4(1)[2 - 0]$$

$$= -5 + 2(-17) + 8 = 3 + (-34) = -31$$

Catatan: Mencari determinan matriks menggunkan kofaktor sepanjang baris maupun sepanjang kolom manapun akan menghasilkan determinan yang sama. Seperti contoh 2 dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris 2 dan kolom 1 menghasilkan determinanmatriks A adalah -31

2

Aturan Crammer

Salah satu cara untuk menyelesaikan/ mencari solusi sistem persamaan linear.

Aturan Cramer

Misalkan SPL ditulis dalam bentuk $AX = B$, yaitu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika determinan A tidak sama dengan nol maka solusi dari SPL dapat dicari dengan menggunakan aturan cramer yaitu,

$$\boxed{x_n = \frac{|A_n|}{|A|}}$$

Keterangan

x_n : nilai variable yang akan dicari

$|A_n|$: Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-n dengan elemen-elemen dari matriks B

|A|: Determinan matriks A

Menyelesaikan SPL dengan Menggunakan Aturan Cramer

PEMBELAJARAN DARING KOLABORATIF

Kasus

Perhatikan kasus berikut ini.

Sebuah pabrik pupuk buatan memproduksi tiga (jenis) pupuk yaitu, pupuk A, B dan C. Banyak pupuk (ton) yang diproduksi dan biaya produksi (juta Rp) dalam tiga bulan pertama ditunjukkan pada tabel di bawah.

Berapa biaya produksi per ton masing-masing pupuk???

Waktu	Jenis Pupuk(ton)			Biaya Produksi (Juta Rp.)
	A	B	C	
Bulan ke-1	2	0	2	Rp. 16.000.000,00
Bulan ke-2	1	1	2	Rp. 17.000.000,00
Bulan ke-3	1	2	1	Rp. 16.000.000,00

Penyelesaian

Waktu	Jenis Pupuk(ton)			Biaya Produksi (Juta Rp.)
	A	B	C	
Bulan ke-1	2	0	2	Rp. 16.000.000,00
Bulan ke-2	1	1	2	Rp. 17.000.000,00
Bulan ke-3	1	2	1	Rp. 16.000.000,00

Misalkan biaya produksi pupuk A per ton adalah x_1
biaya produksi pupuk B per ton adalah x_2
biaya produksi pupuk C per ton adalah x_3

Sistem persamaan linearnya adalah

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad\quad\; 2x_3 &= 16 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Persamaan matriks:

$AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix} \text{->}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Untuk menyelesaiakan dengan aturan cramer, maka harus memenuhi syarat $|A| \neq 0$. determinan A dihitung dengan cara ekspansi baris 1 (k=1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)[1-4] + 0 + 2(1)[2-1]$$

$$= 2(-3) + 2(1) = -6 + 2 = -4 \neq 0$$

Karena $|A| \neq 0$ maka dapat menggunakan aturan cramer untuk mencari solusi SPL.

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Akan dicari $|A_1|$ **yaitu** Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-1 dengan elemen-elemen dari matriks B, (dengan ekspansi kolom ke 2 ($l = 2$))

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 2 \\ 17 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}C_{i2} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$= 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 17 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1(1)[16 - 32] + 2(-1)[32 - 34]$$

$$= 1(-16) + (-2)(-2) = -16 + 4 = -12$$

Sehingga $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-12}{-4} = 3$

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Akan dicari $|A_2|$ **yaitu** Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-2 dengan elemen-elemen dari matriks B, (dengan ekspansi kolom ke 1 (l =1))

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 2 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} C_{i1} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 17 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)[17 - 32] + 1(-1)[16 - 32] + 1(1)[32 - 34]$$

$$= 2(-15) + (-1)(-16) + 1(-2) = -30 + 16 - 2 = -16$$

Sehingga $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-16}{-4} = 4$

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Akan dicari $|A_3|$ **yaitu** Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-3 dengan elemen-elemen dari matriks B, (dengan ekspansi kolom ke 2 (l =2))

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}C_{i2} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$= 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1(1)[32 - 16] + 2(-1)[34 - 32]$$

$$= 0 + (1)(16) = -16 + (-4) = -20$$

Sehingga $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-20}{-4} = 5$

Kesimpulan

Diperoleh $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ dan $x_3 = 5$..

Jadi biaya produksi per ton untuk pupuk A, B dan C, masing-masing berturut-turut adalah Rp.3.000.000,00, Rp. 4.000.000,00 dan Rp.5.000.000,00

Thanks!

PEMBELAJARAN DARING KOLABORATIF 2023