INTEGRAL (2)

1. INTEGRAL TENTU
2. TEOREMA DASAR KALKULUS
3. PENGHITUNGAN INTEGRAL TENTU

1. INTEGRAL TENTU

PENGANTAR
Jumlah Riemann. Jumlah Riemann ditafsirkan sebagai jumlah aljabar dari luas.

Definisi Integral Tentu

Anggaplah f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup [a,b]. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

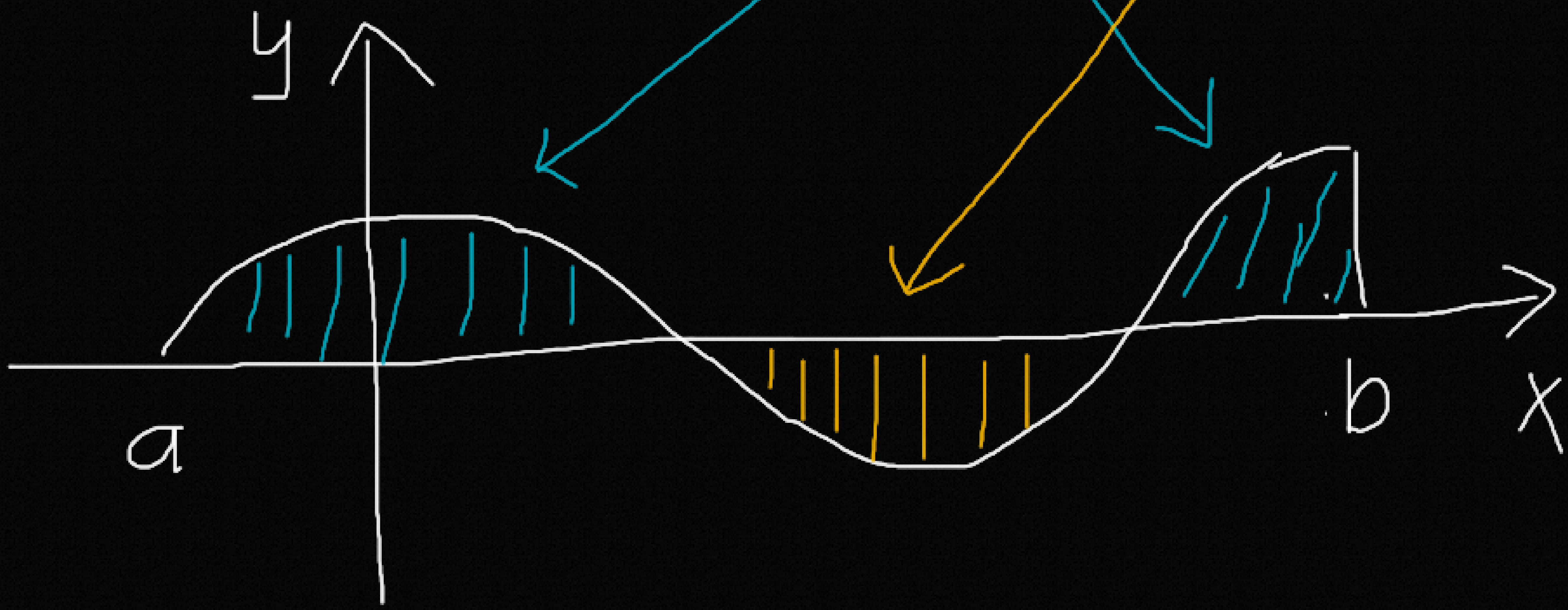
ada, kita katakan f adalah terintegrasikan pada [a,b].

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

disebut integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = A_{atas} - A_{bawah}$$



$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Contoh $\int_2^2 x^3\,dx = 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,, \quad a > b$$

Contoh $\int_6^2 x^3\,dx = -\int_2^6 x^3\,dx$

x adalah peubah dummy (x dapat diganti oleh huruf sebarang lain), sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

Teorema Keintegrasian

Jika f terbatas pada [a,b] dan f kontinu di sana kecuali pada sejumlah titik yang berhingga, maka f terintegrasikan pada [a,b]. Khususnya, jika f kontinu pada seluruh selang [a.b], maka f terintegrasikan pada [a,b].

Sebagai konsekuensi dari teorema ini, fungsi-fungsi berikut terintegrasikan pada setiap selang tertutup [a,b] :

1. Fungsi polinomial
2. Fungsi sinus dan kosinus
3. Fungsi rasional, asalkan selang [a,b] tidak mengandung titik-titik yang mengakibatkan penyebut 0

Teorema. Sifat Tambahan pada Selang

Jika f terintegrasikan pada sebuah selang yang mengandung titik-titik a, b dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

Contoh

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$

2. TEOREMA DASAR KALKULUS

Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Anggaplah f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan anggaplah x sebagai sebuah titik (peubah) pada (a,b). Maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ dt = f(x)$$

Teorema. Sifat Perbandingan

Jika f dan g terintegrasikan pada [a,b] dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam [a,b], maka

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

Teorema. Sifat Keterbatasan

Jika f terintegrasikan pada selang [a,b] dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam [a,b], maka

$$m \leq f(x) \leq M \qquad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a)$$

Teorema. Kelinearan Integral Tentu

Andaikan bahwa f dan g terintegrasikan pada [a,b] dan bahwa k konstanta. Maka k f dan f + g terintegrasikan dan :

(i) $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$;

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$;

(iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$

Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Anggaplah f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang [a,b], dan anggaplah F sebarang antiturunan f pada [a,b]. Jadi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Contoh

Hitunglah $\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)\,dx$

Penyelesaian

1. Dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus Kedua secara langsung

$$\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)\,dx = [2x^2 - 2x^3]_{-1}^{2}$$

$$= (8 - 16) - (2 + 2)$$

$$= -12$$

2. Dengan menggunakan kelinearan pertama

$$\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)dx = 4\int_{-1}^{2} x\,dx - 6\int_{-1}^{2} x^2\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 4\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= -12$$

3. PENGHITUNGAN INTEGRAL TENTU

Pendahuluan

1. $$\int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

2. $$\int x\sqrt{x^2+9}\, dx$$ → membutuhkan substitusi untuk penyelesaiannya

Teorema. Aturan Substitusi untuk Integral Tak-tentu

Andaikan g suatu fungsi yang terdiferensiasikan dan andaikan bahwa F adalah suatu antiturunan dari f. Maka, jika $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F\left(g(x)\right) + C$$

Teorema. Aturan Substitusi untuk Integral Tentu

Andaikan g mempunyai turunan kontinu pada [a,b], dan andaikan f kontinu pada daerah hasil dari g. Maka

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

Teorema Simetri

Jika f fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Jika f fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Teorema

Jika f periodik dengan periode p, maka

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$