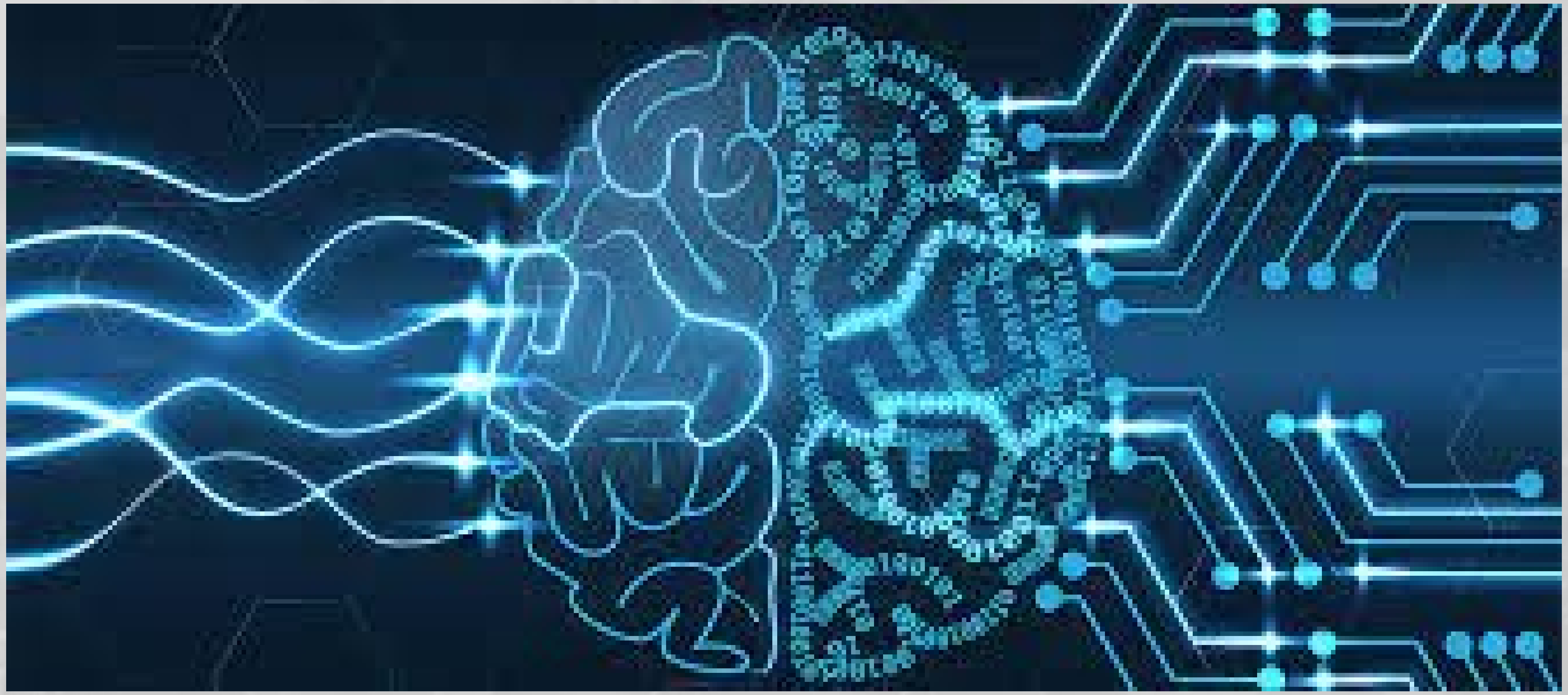
14624533
DEEP LEARNING



Mathematics for Machine Learning –
Linear Algebra

PENGAMPU

Dr. Fajar Astuti Hermawati, S.Kom.,M.Kom.

Bagus Hardiansyah, S.Kom.,M.Si

Andrey Kartika Widhy H., S.Kom., M.Kom.

Capaian Pembelajaran

- **Sub-CPMK-1**: Mampu mengidentifikasi konsep dasar pemelajaran mendalam, konsep matematika dan mesin pemelajar yang mendasari prinsip-prinsip algoritma cerdas serta menentukan karakteristik permasalahan yang dapat diselesaikan dengan algoritma deep learning [C2, A3]

Outlines

Matriks dan Vektor

Perkalian Matriks dan Vektor

Determinan

Eigen-values and Eigen-vectors

Scalars

- Skalar adalah bilangan tunggal
- Bilangan bulat, bilangan real, bilangan rasional, dll.
- Kita menunjukkannya (notasi) dengan huruf miring : *a, n, x*
  - "Misalkan $s \in \mathbb{R}$ adalah kemiringan garis," ketika mendefinisikan skalar bernilai riil
  - "Misalkan $n \in \mathbb{N}$ menjadi jumlah unit" saat mendefinisikan skalar bilangan asli

Vectors

- Vektor adalah larik (array) angka 1-D

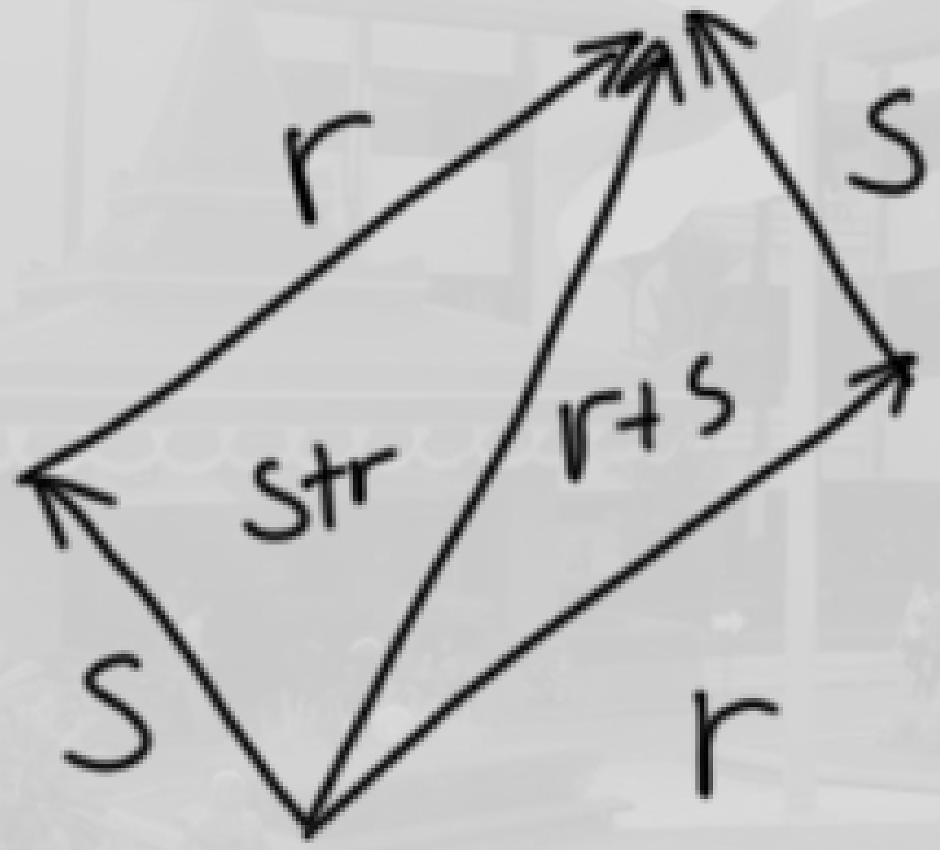
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

- Bisa real, biner, integer, dll.
- Jika setiap elemen dalam $\mathbb{R}$, dan vektor memiliki *n* elemen, maka vektor terletak pada himpunan yang dibentuk dengan mengambil produk Cartesian dari $\mathbb{R}$ *n* kali, dilambangkan dengan $\mathbb{R}^n$

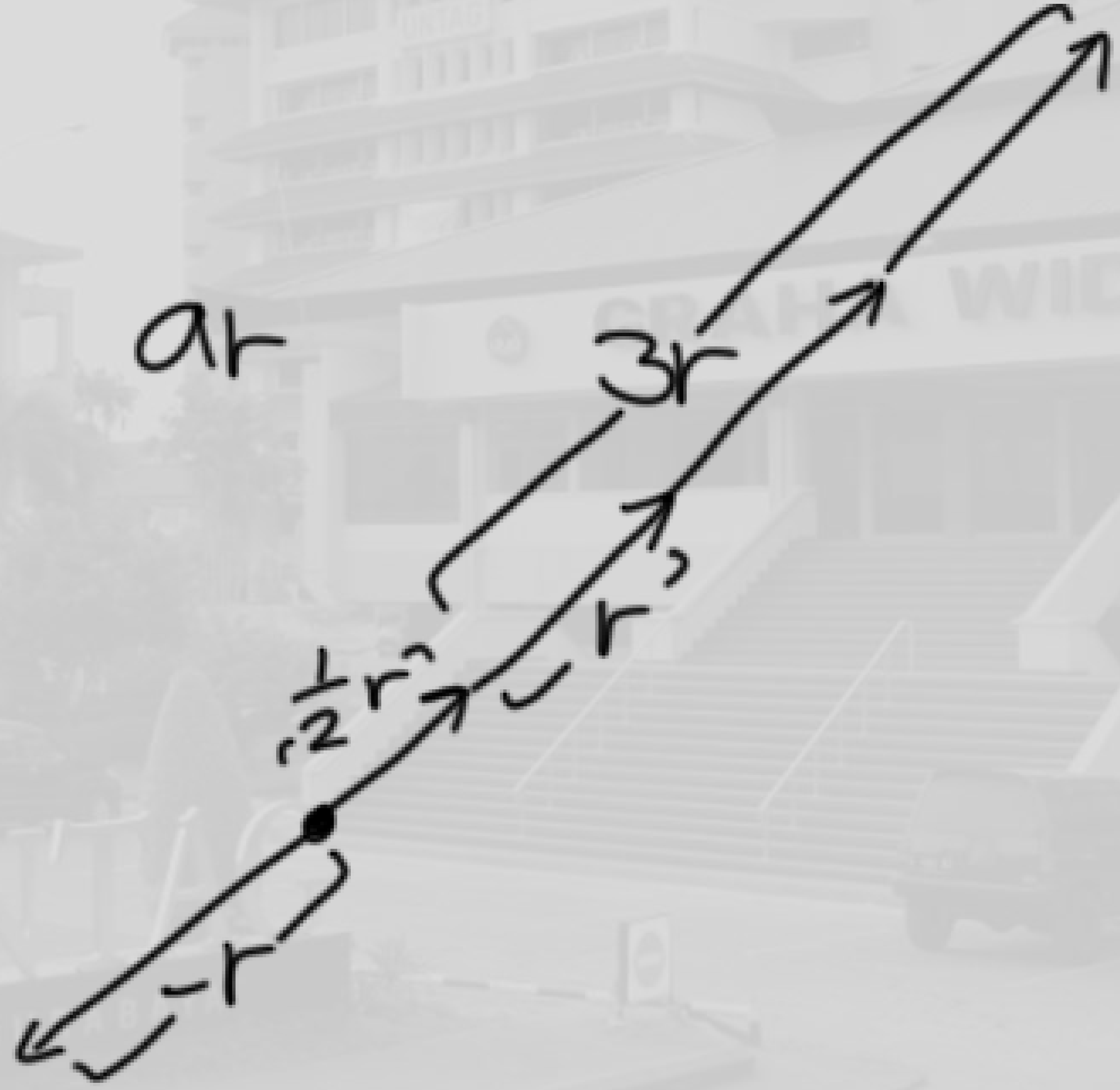
Vectors

- Terkadang kita perlu mengindeks sekumpulan elemen vektor.
- Dalam hal ini, kita mendefinisikan himpunan yang berisi indeks dan menulis himpunan sebagai subskrip.
  - Misalnya, untuk mengakses x_1, x_3 dan x_6, kita mendefinisikan himpunan $S = \{1, 3, 6\}$ dan menulis x_S.
- Kita menggunakan tanda − untuk mengindeks komplemen dari suatu himpunan.
  - Misalnya x_{-1} adalah vektor yang memuat semua elemen x kecuali x_1, dan x_{-S} adalah vektor yang memuat semua elemen x kecuali x_1, x_3 dan x_6.

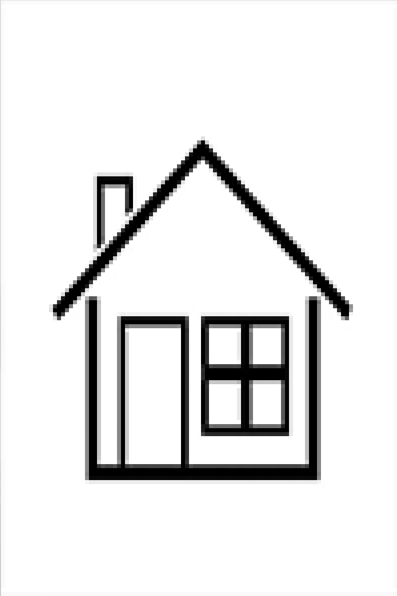
Vector



$r + s = s + r$

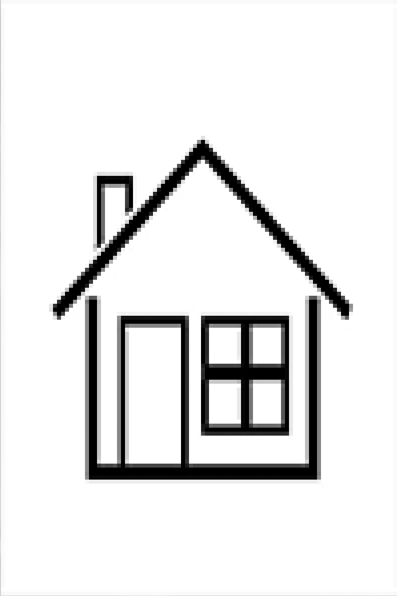


Contoh Vector



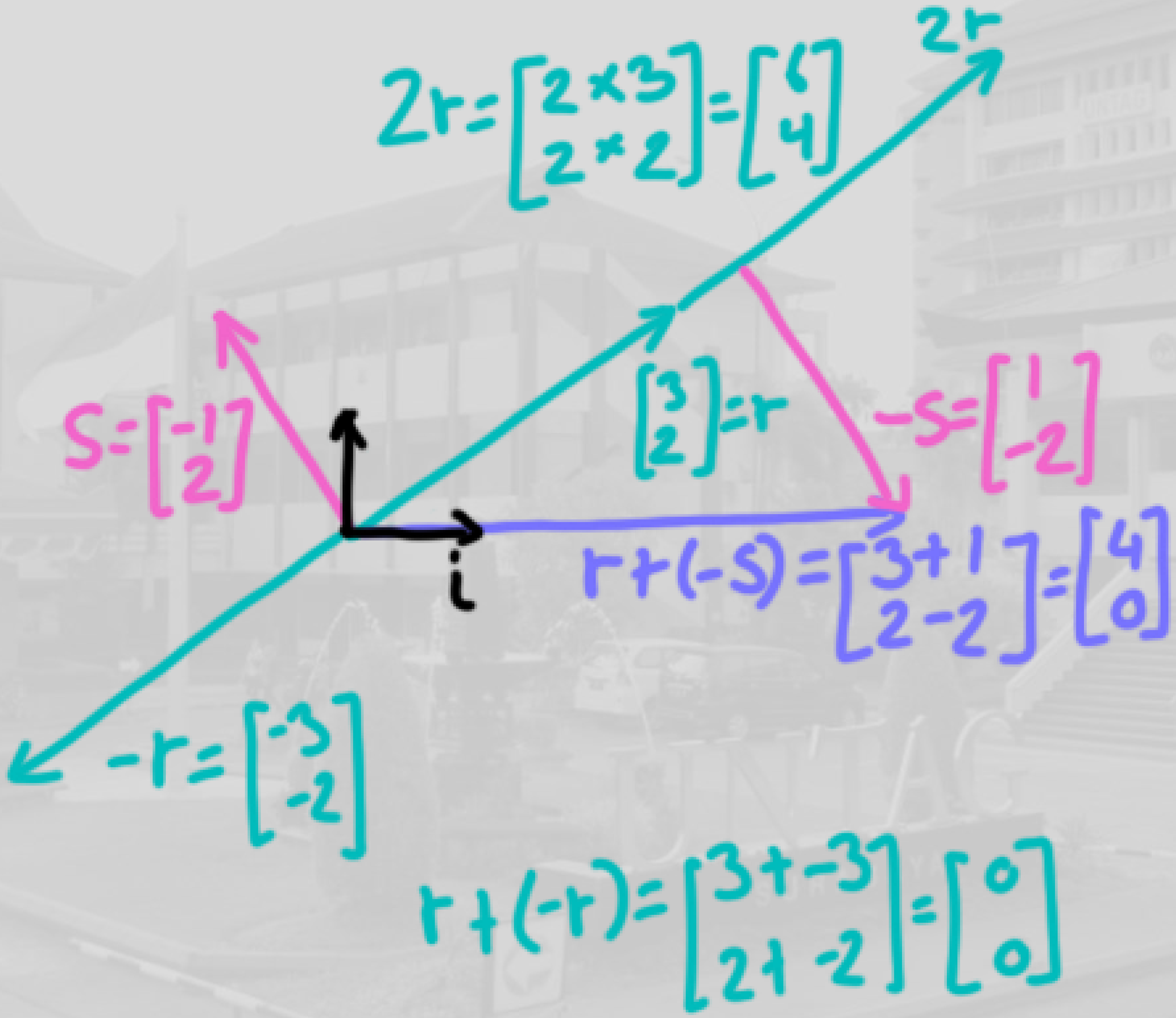
$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} 120 \\ 2 \\ 1 \\ 150 \end{array}\right] & \begin{array}{l} m^2 \\ \text{kamar tidur} \\ \text{toilet} \\ \text{juta} \end{array} \end{array}$$

$+$



$$2\begin{bmatrix} 120 \\ 2 \\ 1 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} 240 \\ 4 \\ 2 \\ 300 \end{array}\right] & \begin{array}{l} m^2 \\ \text{kamar tidur} \\ \text{toilet} \\ \text{juta} \end{array} \end{array}$$

Vector Operations



Rules of Vector

commutative

↳ $s.r = r.s = r_i.s_i + r_j.s_j$

$= 3 \times -1 + 2 \times 2 = -3 + 4 = 1$

distributive

↳ $r(s+t) = r.s + r.t$

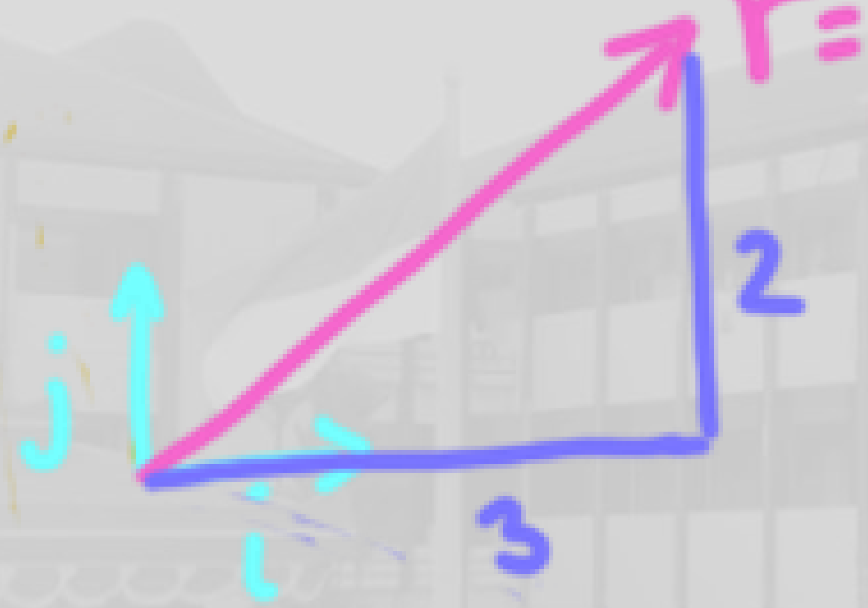
associative

↳ $r.(as) = a.(rs)$

$r_i(as_i) + r_j(a.s_j) = a(r_i s_i + r_j s_j)$

Length

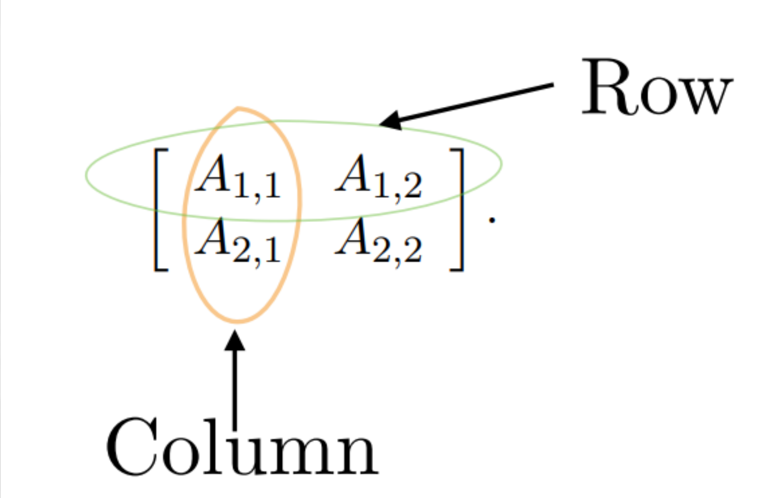
$$r = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_i\\r_j\end{bmatrix}$$



$$r \cdot r = r_i r_i + r_j r_j$$
$$= r_i^2 + r_j^2$$
$$r \cdot r = |r|^2$$

Matrices

- Matriks adalah susunan (array) angka 2-D



- Kita biasanya memberi nama variabel matriks huruf besar dengan huruf tebal, seperti ***A***.
- Jika matriks bernilai nyata ***A*** memiliki tinggi *m* dan lebar *n*, maka kita mengatakan bahwa $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Matrices

- Kita biasanya mengidentifikasi elemen matriks menggunakan namanya dalam huruf miring tetapi bukan huruf tebal, dan indeksnya dicantumkan dengan koma pemisah.
  - Misalnya, $A_{1,1}$ adalah entri kiri atas $\boldsymbol{A}$ dan Am,n adalah entri kanan bawah.
- Kita dapat mengidentifikasi semua angka dengan koordinat vertikal *i* dengan menulis ":" untuk koordinat horisontal.
  - Misalnya, $A_{i,:}$ menunjukkan penampang horizontal $\boldsymbol{A}$ dengan koordinat vertikal *i*. Ini dikenal sebagai baris ke-*i* dari $\boldsymbol{A}$. Demikian juga, $\boldsymbol{A}_{:,i}$ adalah kolom ke-*i* dari $\boldsymbol{A}$.

Matrices

- Ketika kita perlu mengidentifikasi secara eksplisit elemen-elemen suatu matriks, kita menuliskannya sebagai larik yang diapit tanda kurung siku:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

- Terkadang kita mungkin perlu mengindeks ekspresi bernilai matriks yang bukan hanya satu huruf. Dalam hal ini, kita menggunakan subskrip setelah ekspresi tetapi tidak mengubah apa pun menjadi huruf kecil.
  - Misalnya, $f(\boldsymbol{A})_{i,j}$ memberikan elemen (i,j) dari matriks yang dihitung dengan menerapkan fungsi f ke $\boldsymbol{A}$

Tensors

- Tensor adalah larik (array) angka, yang mungkin ada
  - nol dimensi, dan menjadi skalar
  - satu dimensi, dan menjadi vektor
  - dua dimensi, dan menjadi matriks
  - atau lebih dimensi
- Kita menganotasi tensor bernama "A" dengan jenis huruf ini: **A**.
- Kita mengidentifikasi elemen **A** pada koordinat (*i*, *j*, *k*) dengan menulis $\mathbf{A}_{i,j,k}$.

Matrix Transpose

- Transpose matriks adalah bayangan cermin dari matriks melintasi garis diagonal, yang disebut diagonal utama, berjalan ke bawah dan ke kanan, dimulai dari sudut kiri atas.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^\top = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

- Kita menyatakan transpose matriks ***A*** sebagai **A**$^\top$, dan didefinisikan sedemikian rupa $(\boldsymbol{A}^\top)_{i,j} = A_{j,i}$. dan berlaku $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top$.

add matrices

- dengan menjumlahkan elemen-elemennya yang bersesuaian: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ di mana $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$
- Kita juga dapat menambahkan skalar ke matriks atau mengalikan matriks dengan skalar, hanya dengan melakukan operasi tersebut pada setiap elemen matriks: $\boldsymbol{D} = a \cdot \boldsymbol{B} + c$ di mana $D_{i,j} = a \cdot B_{i,j} + c$

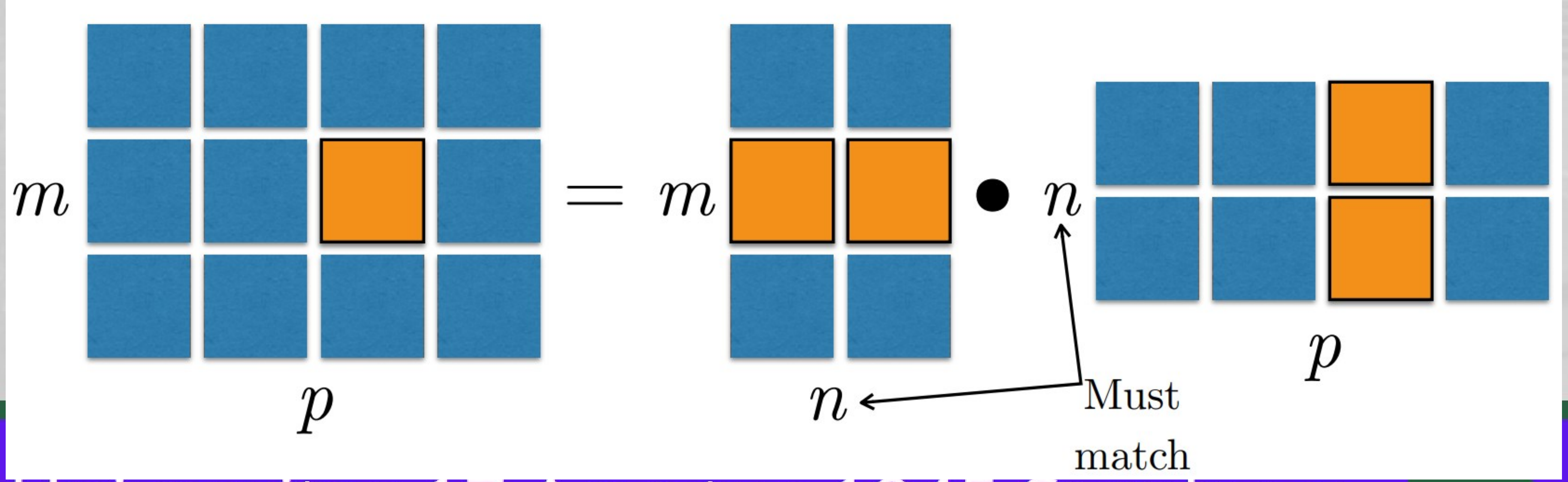
add matrices

- Dalam konteks deep learning, kita juga menggunakan beberapa notasi yang kurang konvensional.
- Kita mengizinkan penambahan matriks dan vektor, menghasilkan matriks lain: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + b$, di mana $C_{i,j} = A_{i,j} + b_j$.
- Dengan kata lain, vektor *b* ditambahkan ke setiap baris matriks.
- Penyingkatan ini menghilangkan kebutuhan untuk mendefinisikan matriks dengan *b* disalin ke setiap baris sebelum melakukan penjumlahan.
- Penyalinan implisit *b* ke banyak lokasi ini disebut ***broadcasting***.

Matrix (Dot) Product

- Perkalian dua buah matriks ***A*** dan ***B*** dan hasilnya disimpan menjadi matriks baru ***C*** dapat dituliskan: ***C*** = ***AB***
- Operasi produk ditentukan oleh

$$C_{i,j} = \sum_k A_{i,k} B_{k,j} .$$



Matrix (Dot) Product

- Perhatikan bahwa produk standar dari dua matriks bukan hanya sebuah matriks yang mengandung produk dari masing-masing elemen.
- Operasi semacam itu ada dan disebut ***element-wise product***, atau produk **Hadamard**, dan dilambangkan sebagai ***A*** ʘ ***B***
- **Hasil kali titik antara dua vektor *x* dan *y*** dengan dimensi yang sama adalah **hasil kali matriks $x^T y$**.

Identity Matrix

- Matriks identitas adalah matriks yang tidak mengubah vektor apa pun ketika kita mengalikan vektor itu dengan matriks itu.
- Kita menunjukkan matriks identitas yang mempertahankan vektor n-dimensi sebagai $\boldsymbol{I}_n$. Secara formal, $\boldsymbol{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{I}_n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

- Example identity matrix: $\boldsymbol{I}_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aljabar Linier
Perkalian Matriks dan Vektor

Mengapa kita perlu mempelajari tentang aljabar linier?

Aljabar linier adalah matematika yang terkait dengan array.

X: Array[3]

$$X \in \mathbb{R}^3$$

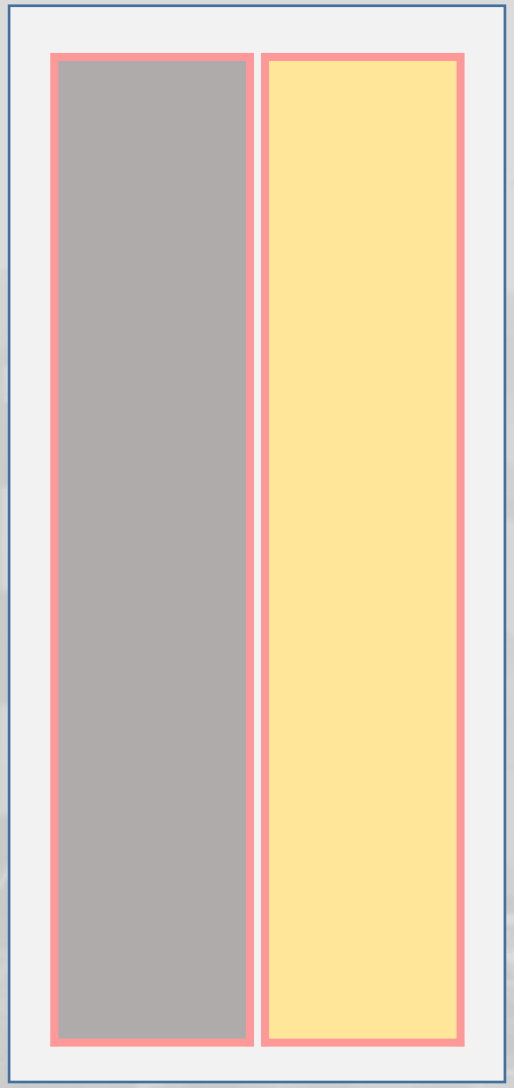
Operasi inti didalam aljabar linier adalah perkalian matriks.

Berikut adalah beberapa contoh perkalian matriks :

- -{Dot, scalar, inner} product
- -Correlation/covariance
- -Linear regression
- -Logistic regression
- -Principal components analysis
- -Discrete Fourier transform (JPEG)
- -PageRank
- -Hidden layers of neural nets
- -Convolutions

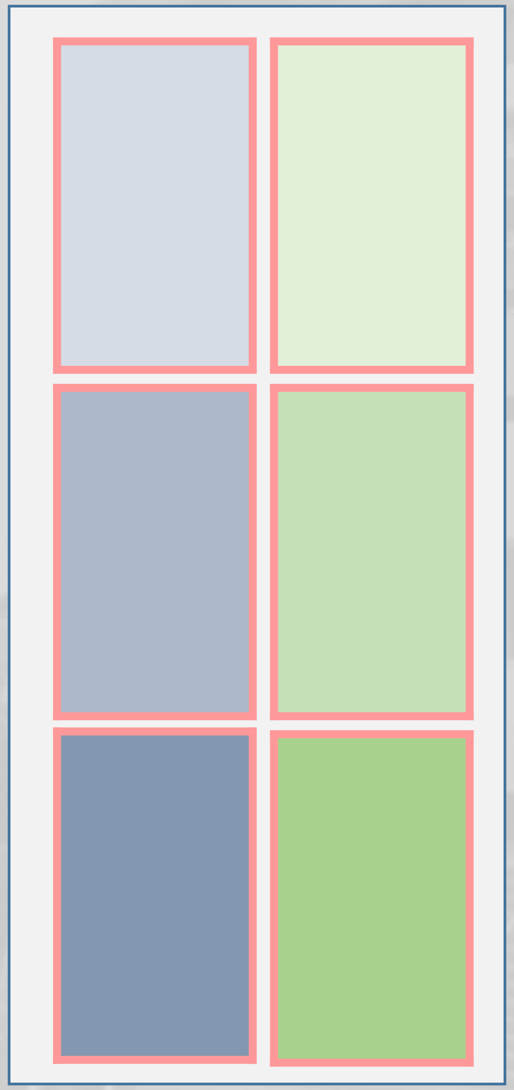
Perkalian matriks ternyata cukup sederhana.

$X = Array[3, k]$



$Y = Array[k, 2]$

=

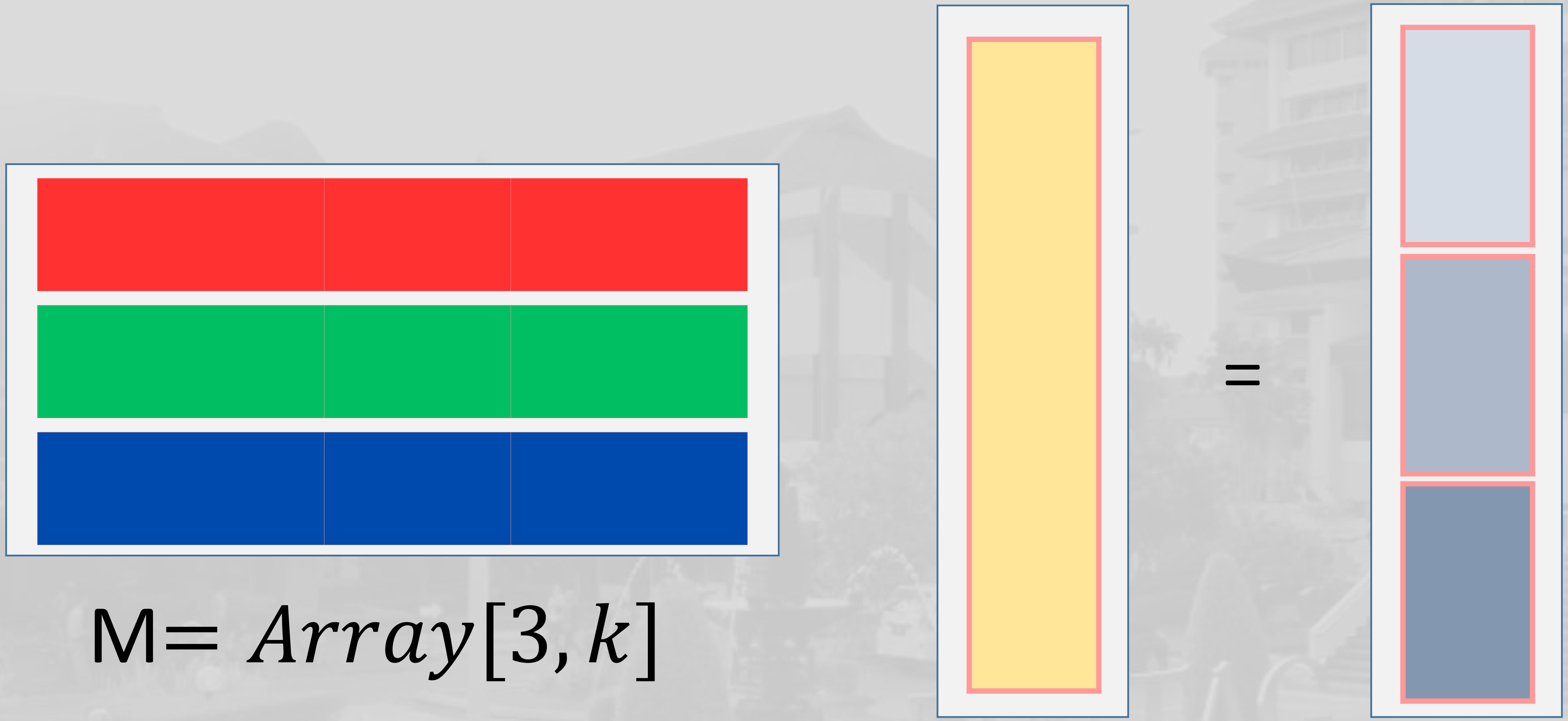


$XY = [3,2]$

$$(X,Y)_{ij} = \sum_r X_{i,r} Y_{r,j}$$

$$= XY_{ij}$$

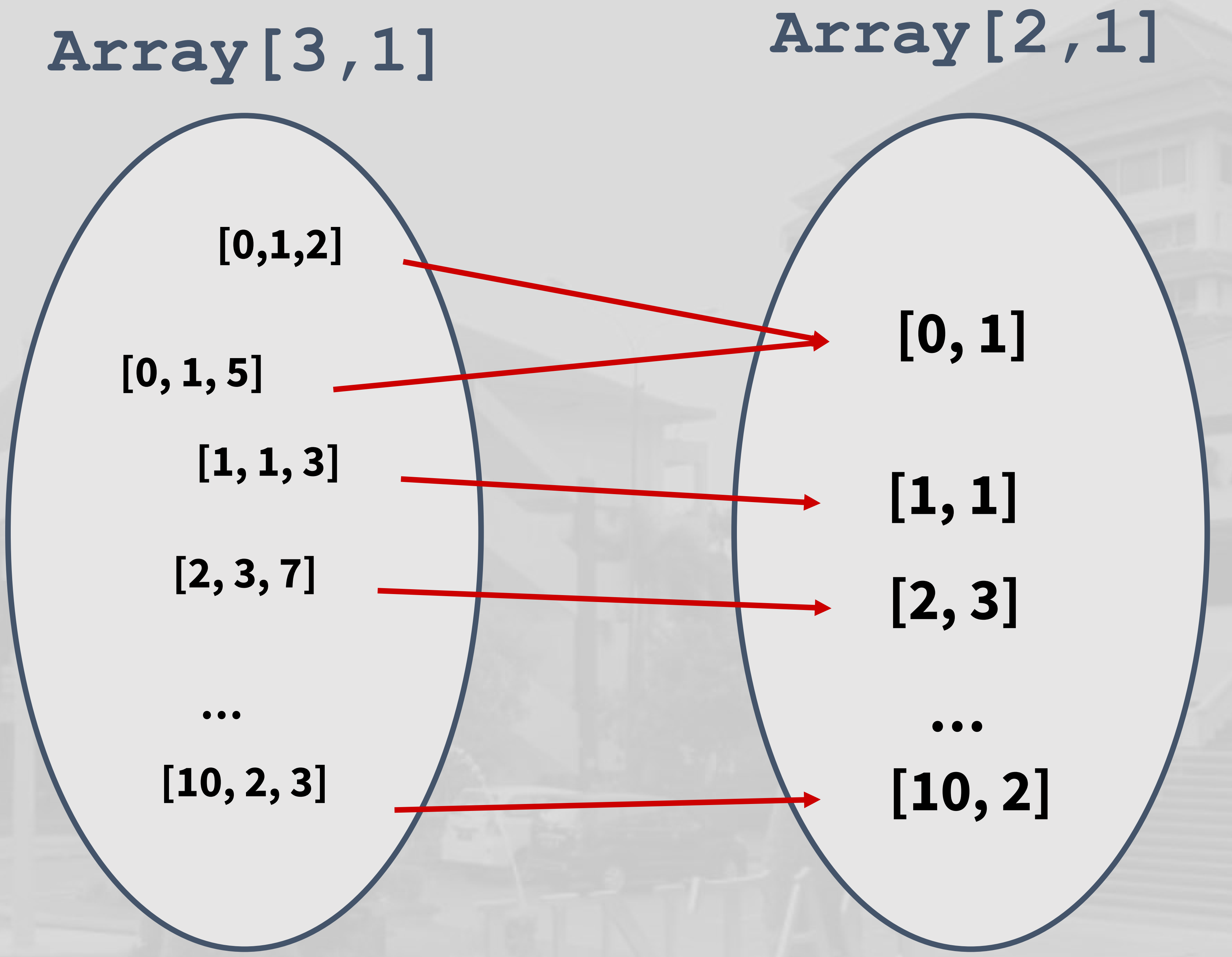
Perkalian matriks-vektor adalah function application



M$= Array[3, k]$

V$= Array[k, 1]$

MV$= Array[3,1]$



`X: Array[3,1] -> Array[2,1]`

Notasi

- Matriks berukuran m x n (m baris dan n kolom):

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika m = n maka dinamakan matriks persegi (*square matrix*) orde n

- Contoh matriks A berukuran 3 x 4:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & -12 \\ 13 & 11 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

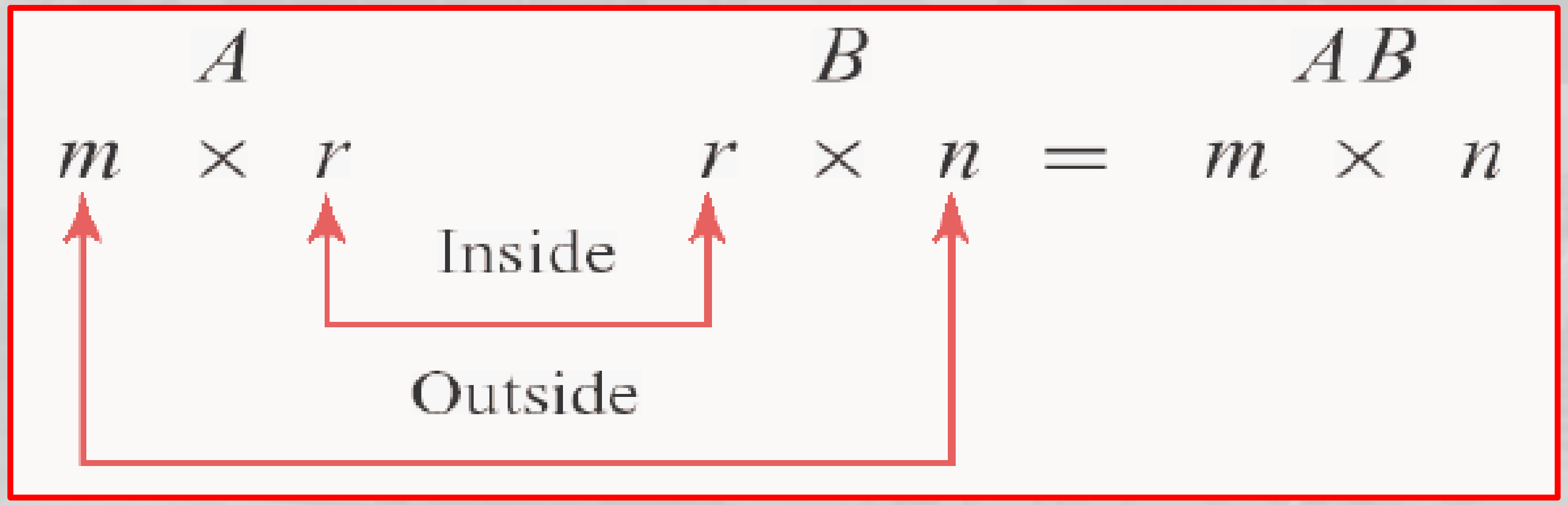
Perkalian Matriks

- Perkalian dua buah matriks $C_{m \times n} = A_{m \times r} \times B_{r \times n}$

Misal $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$

maka $C = A \times B = [c_{ij}]$, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

syarat: jumlah kolom A sama dengan jumlah baris B



• Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Kombinasi Linier Matriks

- Perkalian matriks dapat dipandang sebagai kombinasi linier
- Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Contoh: perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dapat ditulis sebagai kombinasi linier

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

• Contoh lain: perkalian matriks

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

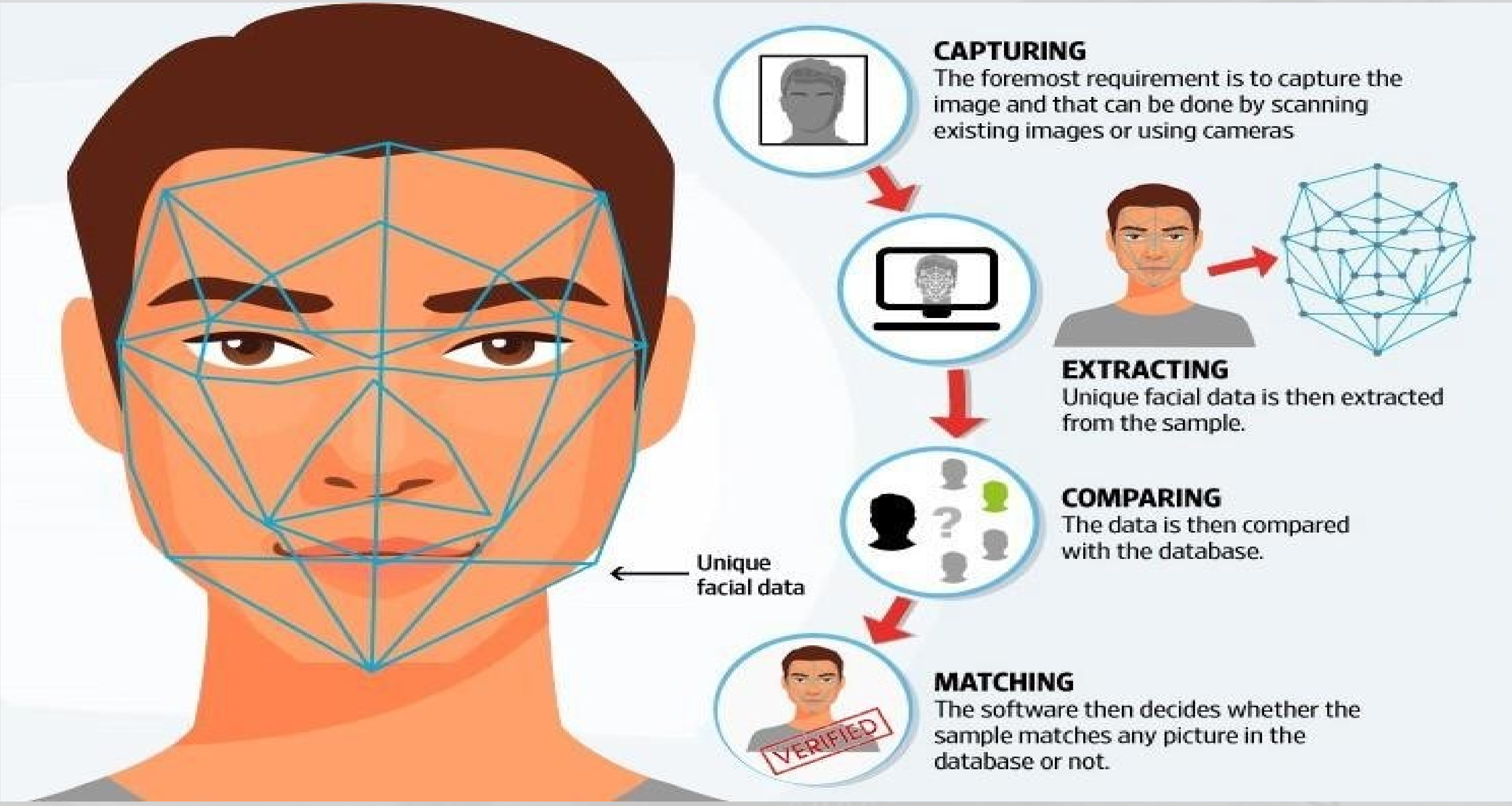
dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

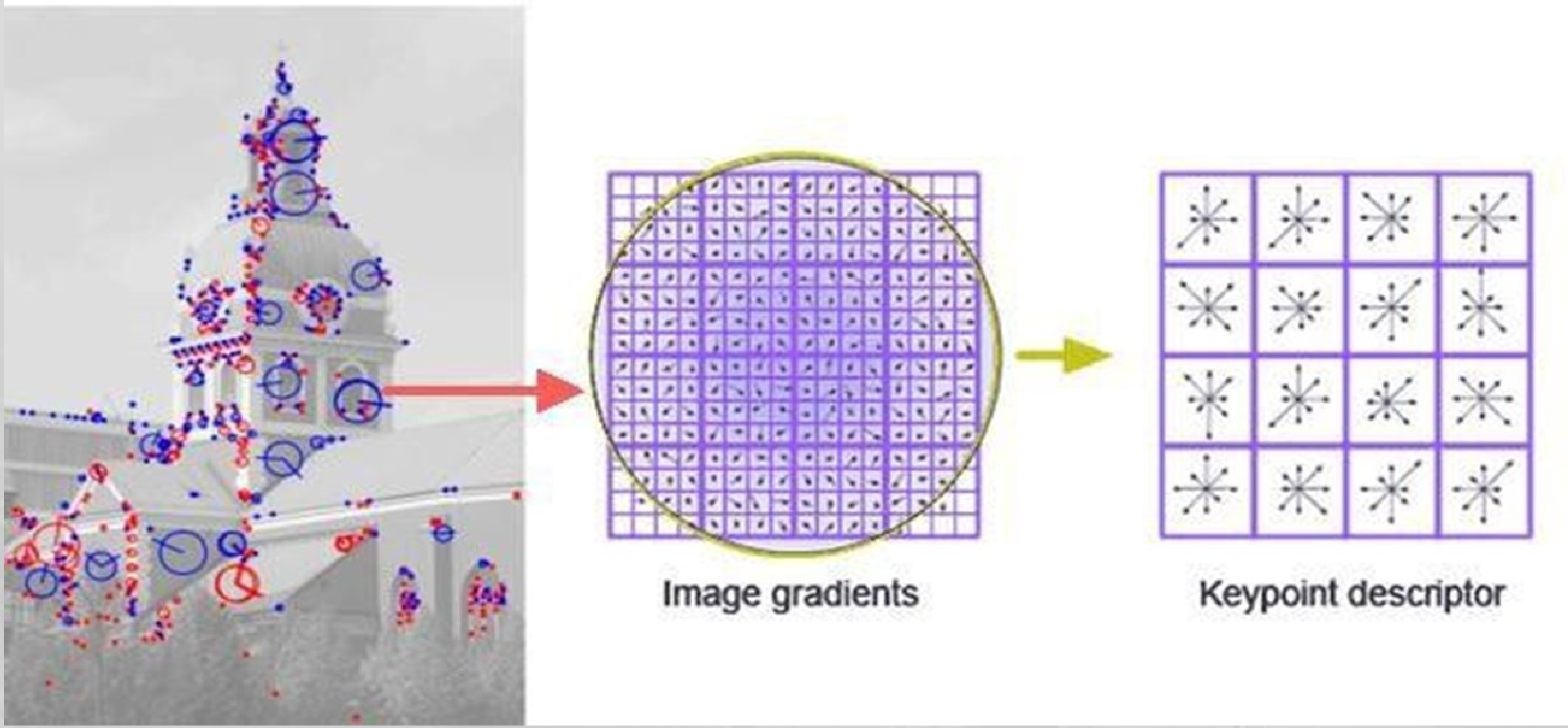
$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Alur proses di dalam sistem pengenalan wajah (flow face recognition)
(Sumber: https://www.shadowsystem.com/page/20)



Ekstraksi fitur dari sebuah citra (extract feature)

(Sumber: https://medium.com/machine-learning-world/feature-extraction-and-similar- image-search-with-opencv-for-newbies-3c59796bf774)

Aljabar Linier
Determinan

Definisi determinan

Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan matriks A dilambangkan dengan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Matriks Balikan

- Matriks balikan (*inverse*) dari sebuah matriks A adalah matriks B sedemikian sehingga

AB = BA = I

- Kita katakan A dan B merupakan balikan matriks satu sama lain

- Contoh: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

- Balikan matriks A disimbolkan dengan A^{-1}

- Sifat: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

- Untuk matriks A berukuran 2 x 2, maka A $^{-1}$ dihitung sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

dengan syarat $ad - bc \neq 0$

- Nilai *ad* – *bc* disebut *determinan*. Jika ad – bc = 0 maka matriks A tidak memiliki balikan (*not invertible*)

- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Tidak memiliki balikan, sebab (-1)(-6) – (3)(2) = 0

Determinan matriks 2 x 2

Untuk matriks A berukuran 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka det(A) = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

Determinan matriks 3 x 3

Untuk matriks A berukuran 3 x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

maka det(A) = $(a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) ={ (2)(-2)(7) + (1)(5)(-3) + (3)(4)(-1)} –
{(3)(-2)(-3) + (2)(5)(-1) + (1)(4)(7)
= -28 – 15 – 12 – 18 + 10 - 28 = -91

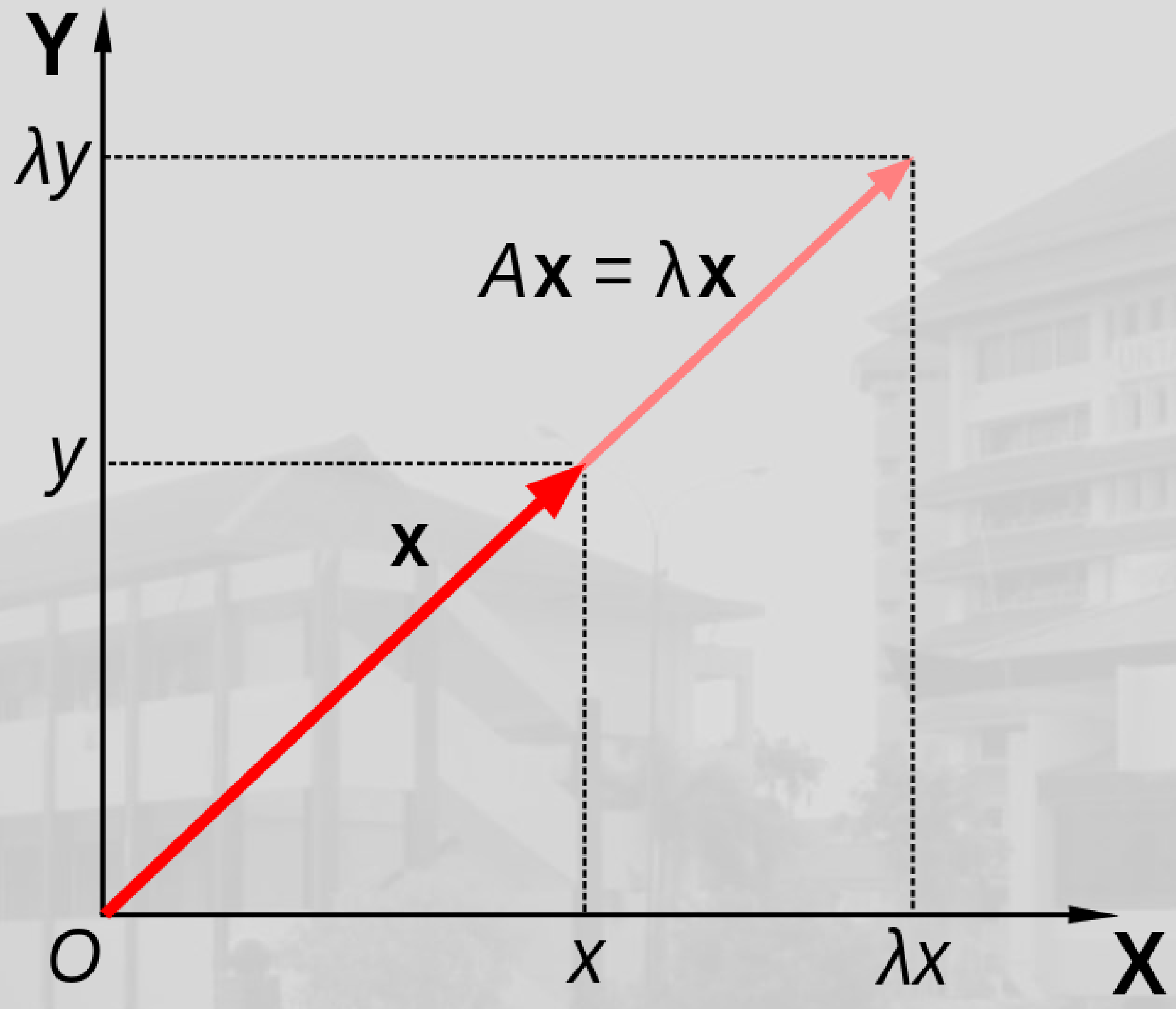
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

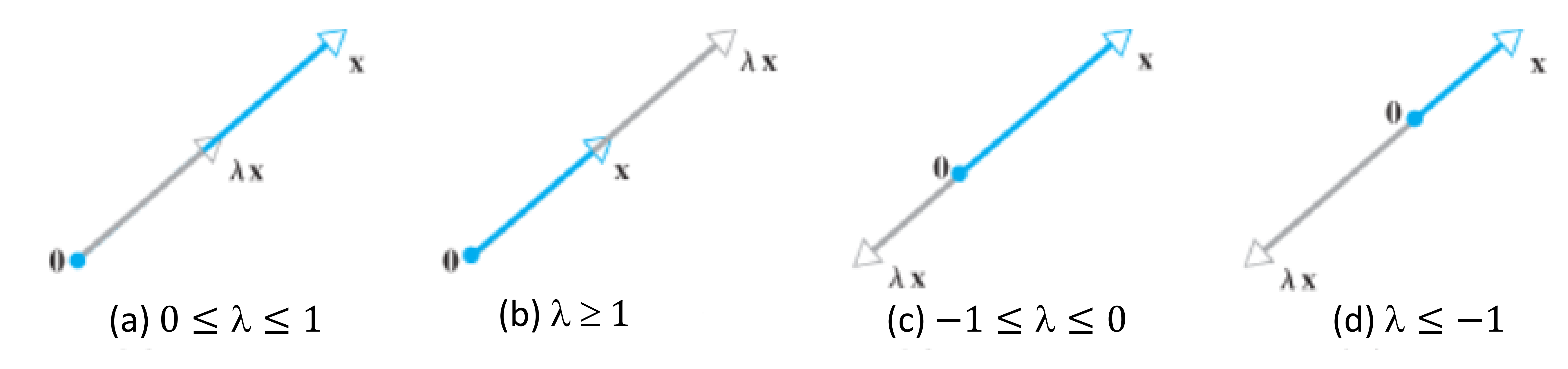
Aljabar Linier
Eigen-values and Eigen-vectors

Definisi

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

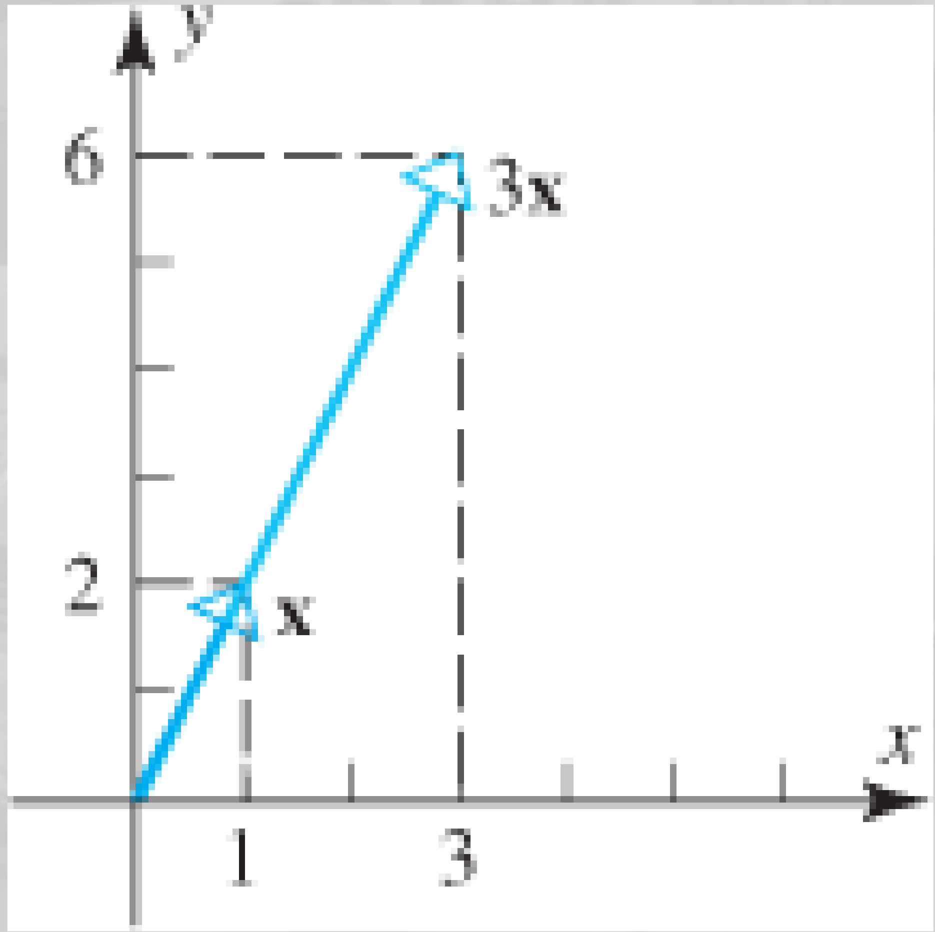
eigenvector *eigenvalue*


Y
λy
Ax = λx
y
x
O
x
λx
X


x
λx
0
(a) 0 ≤ λ ≤ 1
λx
x
0
(b) λ ≥ 1
x
0
λx
(c) −1 ≤ λ ≤ 0
x
0
λx
(d) λ ≤ −1

Contoh 1: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Vektor x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari A dengan nilai eigen yang berkoresponden λ = 3, karena

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$



Diagonalisasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diberikan sebuah matriks A berukuran n x n. Vektor eigen dan nilai eigen dari matriks A dihitung sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$IA\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \qquad \text{(kalikan kedua ruas dengan } I \text{ = matriks identitas)}$$

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

$$(\lambda I - \mathrm{A})\mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{x} = 0$ adalah solusi trivial dari $(\lambda I - \mathrm{A})\mathbf{x} = 0$

Agar $(\lambda I - \mathrm{A})\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi tidak-nol, maka haruslah

$$\det(\lambda I - \mathrm{A}) = 0$$

Sistem Persamaan Linier Homogen

- Sistem persamaan linier homogen berbentuk:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{array}
$$

- $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ solusi non-trivial.
- Jika ada solusi lain selain $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, solusi non-trivial.

- Di dalam sebuah SPL sembarang A**x** = **b**, sebuah SPL disebut konsisten.
- Sebaliknya, sebuah SPL disebut inkonsisten.
- SPL homogen A**x** = **0** selalu konsisten karena ia sedikitnya mengandung solusi trivial.

Aplikasi nilai eigen dan vektor eigen

- Grafika computer
- Fisika: getaran mekanis, aliran panas, mekanika kuantum
- Matematika: Matematika Kuantum
- Biologi: dinamika populasi
- Sistem pendukung keputusan
- Ekonomi
- dll

Terima Kasih