BAB V

ATOM HIDROGEN

A. Postulat Bohr Tentang Atom Hidrogen

Pemecahan Persamaan Radial

Persamaan radial yang brekaitan dengan persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\{E-V(r)\}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad (1)$$

Dengan fungsi potensial:

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}; \text{ harga } \ell=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Analisis tentang pemecahan persamaan radial diatas memberikan hasil sebagai dibawah ini:

1) Ada solusi dapat dipergunakan ditetapkan suatu tetapan baru n yang bernilai:

   $$n=(\ell+1),(\ell+2),(\ell+3),\ldots\ldots \qquad (3)$$

2) Bentuk solusi persamaan radial termaksud diatas:

   $$R_{n,\ell}(e\frac{Zr}{na_0}(\frac{Zr}{a})^{\ell}G_{n,\ell}(\frac{Zr}{a_0}) \qquad (4)$$

   Dengan $a_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_0e^2}$, sedangkan:

   $G_{n,\ell}(\frac{Z_e}{a_0})$ adalah suatu polinon dalam $\left(\frac{Zr^-}{n_0}\right)$ dengan harga $n\,dan\,\ell$ yang berbeda.

3) Harga energi:

   $$E_n=-\frac{m_0Z^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2n^2}, \qquad n=1,2,3,4,\ldots\ldots \qquad (5)$$

Rumus energi:

E_n, untuk sistem sistem atom hidrogen yang diperoleh dengan menerapkan metode Shcrodinger ternyata tetap sama. Dengan hasil diperoleh dengan mempergunakan Postulat Bohr.

Rumus energi termaksud, sebagaimana juga rumus tingkat energi menurut Bohr, dapat menerapkan dengan jelas harga-harga panjang gelombang yang dipancarkan oleh atom-atom hidrogen. Oleh karena itu untuk kesesuaian antara pengamatan dan perhitungan berdasarkan teori sangat memperkuat keyakinan orang tentang keampuhan metode schrodinger dalam penelaahan sistem-sistem fisika tingkat atom dan sub atom.

Tabel 1. Persamaan Radial untuk Sistem Atom Hidrogen

N	ℓ	$R_{n\ell};\quad \rho \equiv \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)$
1	0	$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}}$
2	0	$R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (2-\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}$
	1	$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho e^{-\frac{\rho}{2}}$
3	0	$R_{30}(r) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (6-6\rho+\rho^2)e^{-\frac{\rho}{2}}$
	1	$R_{31}(r) = \frac{1}{4\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho(4-\rho)\, e^{-\frac{\rho}{2}}$
	2	$R_{32}(r) = \frac{1}{4\sqrt{30}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^2 e^{-\frac{\rho}{2}}$
4	0	$R_{40}(r) = \frac{1}{96}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (24-36\rho+12\rho^2+\rho^3)e^{-\frac{\rho}{2}}$
	1	$R_{41}(r) = \frac{1}{32\sqrt{15}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (20-10\rho+\rho^2)e^{-\frac{\rho}{2}}$
	2	$R_{42}(r) = \frac{1}{96\sqrt{5}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (6-\rho)\rho^2 e^{-\frac{\rho}{2}}$
	3	$R_{43}(r) = \frac{1}{96\sqrt{15}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^3 e^{-\frac{\rho}{2}}$

Perlu diperhatikan beberapa hal dibawah ini dalam menggunakan tabel, antara lain:

1. ρ dibataskan sebagai $\rho \equiv \frac{2Zr}{na_0}$; dalam tabel tersebut perlu diingat bahwa ρ dalam basis yang berbeda mungkin tidak sama karena harga n yang berlainan.
2. $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_0 e^2} = 0{,}529^0 A$ adalah jejari baru Bohr
3. Fungsi-fungsi normaliasasi, artinya:

   $$\int_0^\infty [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1 \tag{6}$$

Normalisasi Persamaan Gelombangan Schrodinger

Solusi persamaan gelombang Schrodinger untuk sistem atom hidrogen ditandai oleh 3 bilangan bulat $n, \ell, dan\, m$. Oleh karena itu ketiga bilangan tersebut dicantumkan dalam notasi solusi persamaan Schrodinger sebagai:

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\varphi) = R_{n\ell}(r)\psi_{n\ell m}(\theta\varphi) \tag{7}$$

Fungsi gelombang tersebut dinormalisasikan sebagai:

$$\int_0^\infty r^2 dr [R_{n\ell}(r)]^2 \int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} d\theta\, sin\theta\, \psi_{\ell m}^* \psi_{\ell m} = 1 \tag{8}$$

Karena elemen volumennya adalah:

$$d\tau = (dr)(r\, d\theta)(r\, sin\theta\, d\varphi) \tag{9}$$

Dengan menormalisasikan $R_{n\ell}(r)$, dengan $\int_0^\infty [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$, maka dapat dibataskan rapat kebolehjadian radial sebagai berikut:

$$P_{n\ell} = R_{\ell m}^* R_{\ell m} r^2 \tag{10}$$

Persamaan di atas adalah kebolehjadian untuk menemukan suatu elektron atom hidrogen yang keadaannya dinyatakan dengan perangkat bilangan kuantum (n, ℓ), diantara $r\ dan\ (r + dr)$ tanpa memperhatikan harga θ dan harga φ.

Tinjauan Ulang

1. Pada akhirnya ada 3 buah bilangan yang memberi ciri pada solusi persamaan Shrodinger untuk sistem atom hidrogen, yaitu: n, ℓ, m

Keterkaitan bilangan tersebut satu dengan lainnya:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ldots \ldots$$

$$|m| \leq \ell$$

$$\ell = 0,1,2,3, \ldots \ldots$$

$$n = (\ell + 1), (\ell + 2), \ldots \ldots$$

Ketiga bilangan bulat itu dinamakan bilangan kuantum, yang secara khusus diberikan nama sebagai berikut:

$n =$ bilangan kuantum utama

$$n = 0,1,2,3,4, \ldots \ldots$$

$\ell =$ bilangan kuantum lintas edar, atau bilangan kuantum orbital, atau bilangan kuantum azimuth.

$$\ell = 0,1,2,3, \ldots \ldots \quad (n - 1)$$

$m =$ bilangan kuantum magnetic

$$m = -\ell, -(\ell - 1), \ldots \ldots, -1,0, +1,2, \ldots \ldots, \ell$$

2. Setiap perangkat bilangan kuantum (n, ℓ, m), menggambarkan suatu keadaan khusus sistem atom (keadaan kuantum). Setiap keadaan kuantum ditandai oleh perangkat (n, ℓ, m):

Tabel 2. Bilangan Kuantum Sistem Atom Hidrogen

<table>
<tr><th colspan="3">Bilangan kuantum yang menandai Quantum State</th><th colspan="2">Jumlah perangkat bilangan kuantum yang berbeda</th></tr>
<tr><th>n</th><th>ℓ</th><th>m</th><th>n danℓ tertentu</th><th>n tertentu</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>-1</td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>+1</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>$(2\ell + 1)$</td><td>n^2</td></tr>
</table>

Seperti telah dinyatakan maka setiap keadaan kuantum sistem atom hidrogen ditandai oleh perangkat bilangan kuantum (n, ℓ, m). Ternyata bahwa untuk atom hidrogen energi total hanya bergantung dari bilangan kuantum utama n.

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\,(eV) \qquad (11)$$

Ini berarti bahwa keadaan kuantum yang berbeda, tetapi yang memiliki bilangan kuantum utama yang sama, memiliki energi total yang sama. Umpamanya, 4 keadaan kuantum yang dinyatakan dengan: (2, 0, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 1, -1). Semuanya memiliki energi yang sama besar, yaitu:

$$E_2 = -\frac{13{,}6}{4}\,eV = -3{,}4\ eV \qquad (12)$$

Ini dinamakan degenerasi energi, ialah satu harga energi yang memiliki beberapa eigen function yang berbeda, contoh di atas $E_2 = -3{,}4\,eV$ apat dipresentasikan dengan salah satu dari 4 eigen function;

$$\psi_{2,0,0}(r, \theta, \varphi); \psi_{2,1,0}(r, \theta, \varphi);\ \psi_{2,1,1}(r, \theta, \varphi);\ \psi_{2,1,-1}(r, \theta, \varphi); \qquad (13)$$

Fungsi gelombang di atas dinamakan degenerasi eigen function, dengan degenerasi lipat empat.

3. Energi degenerasi ternyata karena kesetangkupan yang tinggi dalam fisika. Dalam kasus atom hidrogen, kesetangkupan bola. Kesetangkupan ini dapat dibuat lebih rendah, umpanya dengan menempatkan atom hidrogen tersebut dalam medan magnet luar.

Kehadiran medan magnet ini meniadakan kesetangkupan bola. Ternyata dalam hal seperti ini degenerasi terangkat, dan energi total ditentukan tidak hanya oleh n, tetapi juga m.

B. Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen

1. Sistem Fisik Atom dan Representasinya Secara Matematika

Model dasar atom hidrogen adalah sebagai berikut:

a. Suatu elektron dengan muatan listrik *e* dan massa *m*, mengelilingi suatu inti yang bermuatan positif + Ze, karena pengaruh gaya Coulomb, maka potensial:

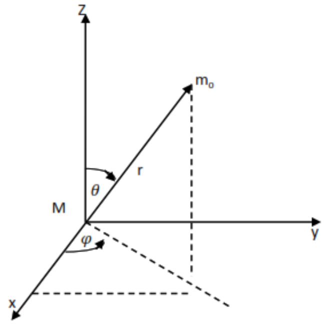
$$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon r} \quad (14)$$

b. Massa inti atom hidrogen *M*, dianggap sangat benar terdapat massa elektron *m*, sehingga titik pusat massa berimpit dengan posisi inti.

Fungsi potensi

$$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (15)$$

Koordinat bola dipanaskan sebagai sistem koordinat acuannya. Sketsa koordinat (x, y, z) dan koordinat (σ, θ, μ) kemudian pula transformasinya adalah:



Gambar 1. Sketsa Koordinat (x, y, z) dan koordinat (σ, θ, μ)

Fungsi Hamilton (fungsi energi total) yang menggambarkan sistem atom hidrogen tersebut adalah:

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V(r) \quad (16)$$

Operator Hamiltonnya:

$$Hop = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(r) \quad (17)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (18)$$

Dalam koordinat bola operator Laplace tersebut berbentuk:

$$\nabla^2 = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad (19)$$

Sehingga dalam koordinat bola, operator Hamilton:

$$\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (20)$$

Dengan demikian pesamaan gelombang Schroedinger untuk model atom H yang sederhana, yaitu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi) \quad (21)$$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad (22)$$

Jadi, untuk notasi singkatan akan digunakan $\psi(\vec{r}\,)$ dalam mempresentasikan adalah $\psi(r,\theta,\varphi)$.

2. Struktur Persamaan gelombang schrodinger untuk sistem atom hidrogen

Andaikan bahwa dapat dilakukan pemisahan variabel sehingga solusi persamaan gelombang untuk atom H dapat ditulis sebagai berikut:

$$\psi(r,\theta,\mu) = R(r)Y(\theta,\varphi) \quad (23)$$

Bagian fungsi R(r) dinamakan bagian radialnya dan $\psi(r,\theta,\mu)$ dinamakan bagian angulernya.

Subtitusi bentuk diatas akan menghasilkan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{Y^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]V(r)R(r)Y \quad (24)$$

$$= ER(r)Y(\theta,\varphi) \quad (25)$$

Apabila seluruh diperkalikan dengan

$$-\frac{2m_0 r^2}{\hbar^2}\frac{1}{R(r)\psi(\theta,\varphi)} \quad (26)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2m_0r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]R \tag{27}$$

$$=-\frac{1}{\psi}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right] \tag{28}$$

Karena ruas kiri terdiri dari variabel r, sedangkan ruas kanan hanya bergantung dari variabel φ, dan apabila keduannya selalu harus sama, masing-masing ruas itu sama dengan suatu tetapan, yang kita namakan saja (λ).

Dari uraian diatas diperoleh dua perangkat persamaan:

1) Persamaan radial

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m_0r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]R-\lambda R=0 \tag{29}$$

atau

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{2m_0r^2}{\hbar^2}\{E-V(r)\}-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0 \tag{30}$$

2) Persamaan anguler

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\varphi}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=-\lambda\psi \tag{31}$$

Dengan $\psi(\theta,\varphi)=H(\theta)\phi(\varphi)$

Subtitusi dalam persamaan anguler akan memberikan

$$\frac{\Phi}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\theta}{d\theta}\right)+\frac{H}{sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda H\Phi \tag{32}$$

Perkalian seluruhnya dengan $sin^2\theta\,\frac{1}{H\Phi}$ akan menghasilkan

$$\frac{1}{H}sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)+\lambda sin^2\theta=-\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} \tag{33}$$

Masing-masing ruas itu harus sama dengan suatu tetapan yang sementara ini dinamakan v permisahan variabel θ dan φ akan menghasilkan dua perangkat persamaan.

1) Persamaan untuk $\phi(\varphi)$

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=-v\Phi(\phi) \tag{34}$$

2) Persamaan untuk $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{v}{sin\theta}\right)\Theta=0 \tag{35}$$

Tinjauan Ulang

Persamaan gelombang schoedinger untuk sistem atom hidrogen

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (36)$$

Merupakan eigen value problem, yang diselesaikan sebagai masalah persamaan differensial parsial

$$\psi(r, 0, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \qquad (37)$$

Akan diperoleh 3 perangkat persamaan berikut:

(1) Persamaan radial R (r):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\{E - V(r)\} - \frac{\lambda}{r_2}\right)R = 0 \qquad (38)$$

(2) Persamaan anguler $\phi(\varphi)$:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -v\Phi \qquad (39)$$

(3) Persamaan angguler $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{v}{sin\theta}\right)\Theta = 0 \qquad (40)$$

Ketiga perangkat persamaan itu tidak independen, tetapi terkait satu dengan lain melalui tetapan λ dan v.

3. Pemecahan Persamaan Anguler $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$

Persamaan anguler $\Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -v\Phi \qquad (41)$$

Diketahui mempunyai solusi $\Phi(\varphi)$ dengan keberkalaan 2π, artinya,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \qquad (42)$$

Solusi yang mungkin

$v \equiv 0$, berarti $\Phi = A + B\varphi$; bukan suatu solusi yang umum

$v \neq 0$, berarti $\Phi = Ae^{iv\frac{1}{2}\varphi} + Be^{iv\frac{1}{2}\varphi}$

Ambil solusi umum, sehingga

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{1m\varphi}; \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots \dots \dots \qquad (43)$$

Faktor (2π) karena normalisasi dalam selang (02π)

Persamaan anguler $\Theta(\theta)$; dengan $v = m^2$ menjadi

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \qquad (44)$$

Bentuk ini dikenal dari fisika mtematika, dengan solusi yang berbentuk: polinon Legendre.

Lakukanlah transformasi $\theta = arc\cos W$, atau $cos\theta = W$, maka solusinya:

$$\Theta(\theta) = p(\omega) \qquad (45)$$

Dimana selang $\theta(0, \pi)$ menjadi selang $W, (1, -1)$

Persamaan differensial diatas berubah menjadi:

$$\frac{d}{dW}\left[(1 - W^2)\frac{dp}{dW}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-W^2}\right]p = 0 \qquad (46)$$

Sifat solusi persamaan diatas adalah sebagai berikut:

a. Secara umum solusi persamaan diatas mempunyai harga talk berhingga di $\omega = +1$, dan $\omega = -1$, kecuali apabila $\lambda = \ell(\ell + 1)$ dengan $\ell = 0{,}1{,}2$
b. Secara khusus, apabila $\lambda = \ell(\ell + 1)$ dengan $\ell = 0{,}1{,}2$ … ada solusi dengan harga berhingga di $\omega = +1$ dan $\omega = -1$, solusi berhingga itu berbentuk:

   $$(1 - \omega^2)^{1/2|m|} \qquad (47)$$

   Dikalikan suatu polinon berderajat $(\ell - |m|)$; dengan paritas $(\ell - |m|)$.
c. Lebih khusus lagi bilamana $m = 0$, solusinya adalah polinon Legendre $P_\ell(\omega)$, yang dapat diperoleh dari fungsi pembangkit

   $$(1 - 2Ws + s)\frac{1}{2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(W)s^\ell \qquad (48)$$

   Polinon Legendre itu memenuhi hubungan s<1

   $$(1 - W^2)P_\ell^1 = -\ell W I_\ell + \ell P_{\ell-1} \qquad (49)$$

   $$(\ell + 1)P_{\ell+1} = (2\ell + vWP_\ell) - \ell P_{\ell-1} \qquad (50)$$
d. Apabila $m \neq 0$, hanya ada satu solusi yang berhingga apabila $|m| \leq \ell$ solusi dinamakan *Associated Legendre Functions*.

   $$P_\ell^m(W) = (1 - W)^{\frac{1}{2}|m|}\frac{d^{|m|}}{dW^{|m|}}P_\ell(\omega) \qquad (51)$$

   Fungsi pembangkit:

$$\frac{(2|m|)!(1-W^2)^{\frac{1}{2}m}s^{|m|}}{2^{|m|}(|m|)!(1-2W+s^2)^{|m|+\frac{1}{2}}} = \sum_{\ell=|m|}^{\ell=\infty} P_\ell^m(W)s^\ell \tag{52}$$

Tinjauan ulang pemecahan anguler total:

1. $\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots \ldots \ldots$
2. $H(\theta)$ mempunyai solusi berhingga, apabila $\lambda = \ell(\ell + 1)$ dengan $\ell = 0,1,2,3, \ldots \ldots \ldots$
3. Apabila $m = 0$, maka $\Theta(\theta)$ adalah polinon Legendre dengan mengambil $\theta\ arc \cos W$, maka:

   $\Theta_\ell(\theta) = P_\ell(W)$, memenuhi:

   $\frac{d}{dw}\left[(1 - W^2)\frac{dP}{dW}\right] + l(l + 1)P_l = 0$
4. Apabila $m \neq 0$, maka solusi berhingga hanya$|m| \leq l$.

   $\Theta_l^m = P_l(W)$ diperoleh melalui transformasi $\theta = arc \cos \omega$

   $P_l^m(\omega)$ memenuhi persamaan:

   $$\frac{d}{dW}\left[(1 - W^2 \frac{dP_l^m}{dW}\right] + \left[l(l - 1) - \frac{m^2}{1-W^2}\right] P_l^m = 0 \tag{53}$$

Contoh Soal:

1. Buktikan harga rata-rata $1/_r$ untuk electron 1s dalam atom hidrogen adalah $1/_{a_0}$.

Jawab:

Fungsi gelombang electron 1s dari tabel adalah:

$$\psi = \frac{e^{-\frac{r}{a_0}}}{\sqrt{\pi a_0}^{\frac{3}{2}}}$$

Karena $dV = r^2 sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$ kita dapatkan harga ekspektasi $1/_r$, yaitu:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{r}\right) |\psi|^2 dV = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a_0}} dr \int_0^\pi sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{a_0^2}{4}, \ \int_0^\pi sin\theta\ d\theta = 2 \quad \text{dan} \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\pi a_0^3} x \frac{a_0^3}{4} x 2 x 2\pi = \frac{1}{a_0}$$

2. Jawablah soal dibawah ini!
   a. Apakah nilai-nilai ℓ yang mungkin bagi $n = 6$.
   b. Apakah nilai-nilai m_ℓ yang mungkin bagi $\ell = 6$.
   c. Apakah nilai ℓ terkecil paling mungkin untuk mana ℓ dapat sama dengan 4.
   d. Apakah nilai ℓ terkecil paling mungkin yang dapat memiliki suatu komponen z sama dengan 4ħ.

Jawab:

a. Nilai-nilai ℓ yang mungkin bagi $n = 6$

   Nilai ℓ terbatas oleh $(n - 1)$, jadi nilai ℓ yang mungkin bagi $\ell = 6$ adalah: 0, 1, 2, 3, 4, 5, atau ℓ yang mungkin {0, 1, 2, 3, 4, 5}.
b. Nilai bilangan kuantu magnetic m_ℓ dibatasi oleh $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \ell$. Jadi nilai m_ℓ yang mungkin untuk $\ell = 6$, yaitu $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ atau $\{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$.
c. Nilai ℓ terkecil paling mungkin untuk mana $\ell = 4$ adalah -4.
d. Karena $\ell_z = m_\ell \hbar$, maka 4ħ $= m_\ell \hbar$, jadi $m_\ell = 4$.

3. Hitunglah kedudukan r untuk mana rapat kebolehjadian $P(r) = r^2 R_{n\ell}(r)$ berharga maksimum untuk keadaan sistem atom atom hydrogen $n = 2$ dan $\ell = 1$.

Jawab:

$$\psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta, \varphi) = RR_{n\ell}(r)\Theta_{\ell m_\ell}(\theta)\phi_{m\ell}(\varphi)$$

P_{21} maksimum pada r yang memenuhi $\frac{dP_{21}}{dr} = 0$ atau

$\frac{1}{24a_0^5}\frac{d}{dr}\left(r^4 e^{-\frac{r}{a_0}}\right) = 0$ atau karena $e^{-\frac{r}{a_0}} \neq 0$, maka $r = 4a_0$.

Latihan

1. Jawablah:
   a. Hitunglah kedudukan r untuk rapat kebolehjadian $P(r) = r^2 R_{n\ell}(r)$ berharga maksimum untuk keadaan sistem atom hidrogen $n = 3$ dan $\ell = 2$.
   b. Hitunglah harga ekspektasi $\langle r \rangle$ untuk keadaan tersebut.
2. Jawablah:
   a. Apakah nilai-nilai ℓ yang mungkin bagi $n = 7$.
   b. Apakah nilai-nilai m_ℓ yang mungkin bagi $\ell = 7$.
   c. Apakah nilai ℓ terkecil paling mungkin yang dapat dimiliki suatu komponen z dengan 5ħ.
3. Jawablah:
   a. Tentukan $\langle r \rangle$ untuk atom hidrogen $n = 1$ dan $\ell = 0$.
   b. Tentukan $\langle r^2 \rangle$ untuk atom hidrogen $n = 1$ dan $\ell = 0$.

C. Momentum Sudut

1. Operator $\hat{L}_z$

Nilai eigen dan fungsi eigen operator $\hat{L}_z$ dapat ditetapkan seperti berikut. Misalkan $\Phi(\phi)$ adalah fungsi eigen bersangkutan dengan nilai eigen $\hat{L}_z$, sehingga:

$$\hat{L}_z\Phi = L_z\Phi; \qquad (54)$$

atau

$$-i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = L_z\Phi$$

sehingga

$$\Phi = \Phi_0 e^{iL_z\phi/\hbar}$$

Karena sifat $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, maka:

$$\exp\left(\frac{iL_z\phi}{\hbar}\right) = \exp\left[\frac{iL_z(\phi + 2\pi)}{\hbar}\right]$$

$$= exp\left(\frac{iL_z\phi}{\hbar}\right) exp\left(\frac{i2L_z\pi}{\hbar}\right)$$

Jadi, $\exp\left(\frac{i2\pi L_z}{\hbar}\right) = cos\left(\frac{2\pi L_z}{\hbar}\right) + i\, sin\left(\frac{2\pi L_z}{\hbar}\right) = 1$, artinya:

$$\frac{2\pi}{\hbar}L_z = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

sehingga harga eigen operator $\hat{L}_z$ adalah:

$$L_z = m_\ell\hbar \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ldots \qquad (55)$$

Dengan fungsi eigen bersangkutan:

$$\Phi_{m_\ell}(\phi) = Ce^{im_\ell\phi} \qquad (56)$$

Contoh Soal:

Tentukanlah faktor normalisasi C agar fungsi $\Phi_{m_\ell} = C\exp{(im_\ell\phi)}$ dalam persamaan (56) ternormalisasi.

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^* \, \Phi_m d\phi = 1;$$

$$C^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Jaid,

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_\ell\phi} \qquad (57)$$

Persamaan (56) dan (57) merupakan nilai eigen dan fungsi eigen dari operator $\hat{L}_z$. Nilai eigen di atas nama dengan yang dikemukakan oleh Bohr tentang momentum sudut suatu elektron di dalam atom hidrogen. L_z sebagai komponen momentum sudut pada sumbu-z ternyata merupakan besaran yang diskrit atau terkuantisasi. Dengan perkataan lain komponen-z itu terkuantisasi. Dalam eksperimen, sumbu-z dinyatakan sebagai sumbu di mana arah medan magnet statik ditetapkan. Oleh sebab itu m_ℓ disebut bilangan kuantum magnetik orbital.

2. Operator $\hat{L}^2$

Nilai eigen dan fungsi eigen operator $\hat{L}^2$ ditentukan sebagai berikut. Andaikan $Y(\theta, \phi)$ adalah fungsi eigen dengan nilai eigen L^2:

$$\hat{L}^2 Y(\phi, \theta) = L^2 Y(\phi, \theta) \tag{58}$$

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$$sin^2\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + sin\theta\, cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{L^2 sin^2\theta}{\hbar^2}Y = -\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} \tag{59}$$

Agar dapat diselesaikan, terlebih dahulu harus dilakukan pemisahan variabel; untuk itu misalkan:

$$Y(\theta, \varphi) = P(\theta)\Phi(\phi) \tag{60}$$

Substitusi ke persamaan (59) menghasilkan:

$$\frac{1}{P}\left(sin^2\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} + sin\theta\, cos\theta\frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{L^2 sin^2\theta}{\hbar^2}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Jelas kini, pihak kiri hanya bergantung pada θ dan pihak kanan hanya bergantung pada ϕ; oleh sebab itu masing-masing pihak dapat dinyatakan sama dengan suatu konstanta. Karena kita sudah mengenal fungsi Φ dalam persamaan (56), konstanta itu adalah ${m_\ell}^2$, sehingga diperoleh persamaa diferensial;

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} + ctg\theta\frac{\partial P}{\partial\theta} + \left(\frac{L^2}{\hbar^2} - \frac{{m_\ell}^2}{sin^2\theta}\right)P = 0 \tag{61}$$

Persamaan ini identic dengan persamaan Legendre terasosiasi dengan:

$$L^2 = \hbar^2\ell(\ell+1) \qquad\qquad \ell \geq |m_\ell| \tag{62}$$

dan fungsi P adalah:

$${P_\ell}^{|m_\ell|}(w) = \frac{(-1)^{|m_\ell|}}{2^\ell \ell!}(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m_\ell|}\left(\frac{d}{dw}\right)^{\ell+|m_\ell|}(w^2-1)^\ell \quad w = cos\theta \tag{63}$$

Fungsi ${P_\ell}^{|m_\ell|}(w)$ olinom Legendre-terasosiasi, dengan sifat ortogonalitas sebagai berikut:

$$\int_0^\pi P_\ell^{|m_\ell|}(cos\theta)P_\ell^{|m_\ell|}\,(cos\theta)sin\theta\; d\theta = \sqrt{\frac{2(\ell+|m_\ell|!}{(2\ell+1(\ell-|m_\ell|}}\delta_{\ell\ell} \qquad (64)$$

Sehubungan dengan persamaan (63), dibawah ini diberikan contoh $P_\ell^{|m_\ell|}(\theta)$:

$$P_0{}^0(\theta) = 1$$

$$P_1{}^0(\theta) = cos\theta$$

$$P_1{}^{\pm1}(\theta) = -sin\theta$$

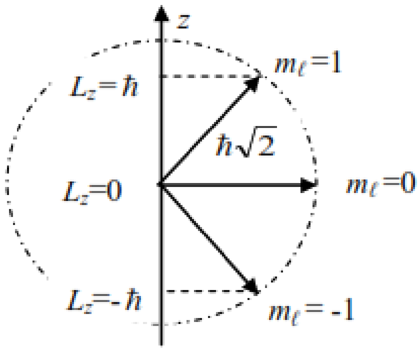
(65)

$$P_2{}^0(\theta) = \frac{1}{2}(3cos^2\theta - 1)$$

$$P_2{}^{\pm1}(\theta) = -3cos\theta\; sin\theta$$

$$P_2{}^{\pm2}(\theta) = 3sin^2\theta$$

Dalam persamaan (62), ℓ adalah bilangan positif: 0, 1, 2, ...; bilangan ini disebut bilangan kuantum orbital. Dari persamaan itu jelas bahwa untuk suatu nilai ℓ ada $(2\ell + 1)$ buah nilai m_ℓ, yakni $m_\ell = -\ell, -(\ell-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots\ldots, (\ell-1), \ell$. Untuk $\ell = 1$, besarnya momentum sudut adalah $L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} = \hbar\sqrt{2}$. Momentum sudut mempunyai tiga orientasi yang diperlihatkan dalam Gambar 2, $L_z = m_\ell\hbar$ adalah hasil proyeksi $\vec{L}$ pada sumbu-z; m_ℓ disebut



Gambar 3. Orientasi momentum sudut terhadap sumbu-z untuk $\ell = 1$

Bilangan kuantum magnetik orbital Ini menggambarkan kuantisasi komponen-z dari momentum sudut. Akhirnya, dari persamaan (60), diperoleh fungsi eigen yang ternormalisasi bagi operator $\hat{L}^2$:

$$Y(\theta,\phi) \equiv Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m_\ell|!)}{4\pi(\ell+|m_\ell|!}}P_\ell^{m_\ell}(cos\theta)e^{im_\ell\phi} \qquad (66)$$

yang biasa disebut harmonik-harmonik bola (spherical harmonics). Fungsi-fungsi tersebut membentuk set ortonormal melalui persamaan ortogonalitas berikut:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(Y_{\ell m_\ell})^*\,(Y_{\ell' m'_\ell}sin\theta\; d\theta\; d\phi = \delta_{\ell\ell'}\delta_{m_\ell m'_\ell} \qquad (67)$$

dan dua sifat penting dari fungsi ini adalah:

$$cos\theta Y_{\ell m_\ell} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\left[\sqrt{\frac{\ell^2-m_\ell{}^2}{2\ell-1}}Y_{\ell-1,m_\ell} + \sqrt{\frac{(\ell+1)^2-m_\ell{}^2}{2\ell+3}}Y_{\ell+1,m_\ell}\right] \quad (68)$$

$$sin\theta\ e^{\pm i\varphi}Y_{\ell m_\ell} = \mp\frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\left[\sqrt{\frac{(\ell\mp m_\ell)(\ell\mp m_\ell{}^2)}{2\ell-1}}Y_{\ell-1,m_\ell\pm1} - \sqrt{\frac{(\ell\pm m_\ell+2)(\ell\pm m_\ell+1)}{2\ell+3}}Y_{\ell+1,m_\ell\pm1}\right]$$
(69)

Selanjutnya, beberapa contoh fungsi $Y_{\ell m_\ell}$ adalah sebagai berikut:

$$Y_{00}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4x}}; \qquad Y_{20}(\theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3cos^2\theta - 1);$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\theta; \qquad Y_{2\pm1}(\theta) = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}sin2\theta e^{\pm i\varphi}; \quad (70)$$

$$Y_{1\pm1}(\theta) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sin\theta e^{\pm i\varphi}; \qquad Y_{2\pm2}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}sin^2\theta e^{\pm2i\varphi}$$

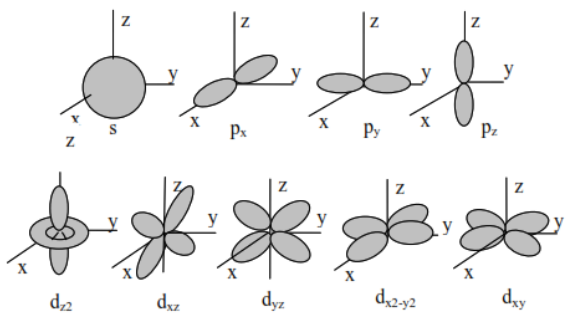
Dengan nilai eigen seperti dalam persamaan (62), persamaan nilai eigen adalah:

$$\hat{L}^2Y_{\ell m_\ell} = ħ^2\ell(\ell+1)Y_{\ell m_\ell}\ ; \qquad \ell = 0,1,2\ \dots\dots$$

$$\hat{L}_2Y_{\ell m_\ell} = m_\ell ħ Y_{\ell m_\ell}\ ; \qquad m_\ell = \pm\ell, \pm(\ell-1) \quad (71)$$

Persamaan-persamaan (62) dan (55) diatas menunjukkan kuantisasi momentum sudut. Dibandingkan dengan postulat Bohr, kuantisasi dalam postulat itu sangat premature dan tidak lengkap; inilah salah satu alasan mengapa teori Bohr tak dapat mengungkapkan struktur atom yang lebih besar.

Orbital-orbital elektron dibentuk dari fungsi-fungsi $Y_{\ell m_\ell}$ dalam bentuk ril. Karena di antara fungsi-fungsi $Y_{\ell m_\ell}$ itu ada yang kompleks, maka pembentukan orbital harus dilakukan melalui kombinasi linier dari fungsi-fungsi tersebut. Orbital-orbital itu diberi simbol s untuk $\ell = 0$, p untuk $\ell = 1$, dan d untuk $\ell = 2$ dan seterusnya. Dalam Gambar 4, dibawah ini di perlihatkan orbital-orbital tersebut.



Gambar 4. Orbital-orbital atom s, p, dan d.

$\ell = 0; \qquad s = Y_0^0$ (72)

$$\ell = 1; \qquad \begin{cases} p_z \equiv Y_1^0 \\ p_x \equiv \frac{-1}{\sqrt{2}}(Y_{11+}Y_{1-1}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} sin\theta\ cos\phi \\ p_y \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(Y_{11+}Y_{1-1}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} sin\theta\ cos\phi \end{cases} \tag{73}$$

$$\ell = 2; \qquad \begin{cases} d_{z^2} \equiv Y_{20} \\ d_{xz} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{21} + Y_{2-1}) = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} sin\theta\ cos\theta\ cos\phi \\ d_{yz} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(Y_{21} - Y_{2-1}) = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} sin\theta\ cos\theta\ sin\phi \\ d_{x^2-y^2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{22} + Y_{2-2}) = \sqrt{\frac{15}{16\pi}} sin^2\theta\ cos^2\phi \\ d_{xy} \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}}(Y_{22} - Y_{2-2}) = \sqrt{\frac{15}{16\pi}} sin^2\theta\ sin^2\phi \end{cases} \tag{74}$$

Dalam pembentukan molekul dari beberapa atom, ikatan antar atom berlangsung melalui orbital-orbital tersebut. Permasalahan ikatan molekul dibahas dalam mekanika kuantum molekul, sebagai kelanjutan dari buku ini.

Contoh Soal:

1. Tentukanlah matriks $\hat{L}_z$ dengan basis fungsi-fungsi $Y_{\ell m_\ell}$ untuk $\ell = 0,1,2$. Berdasarkan persamaan $\hat{L}_z Y_{\ell m_\ell} = m_\ell \hbar Y_{\ell m_\ell}$; maka

Jawab:

$$(\hat{L}_z)_{\ell m_{\ell,} \ell' m'_\ell} = \int Y^*_{\ell', m'_\ell} \hat{L}_z Y_{\ell, m_\ell} sin\theta\ d\theta\ d\phi$$

$$= m_\ell \hbar \int Y^*_{\ell', m'_\ell} Y_{\ell, m_\ell} \sin\theta\ d\theta\ d\phi = m_\ell \hbar \delta_{\ell\ell'} \delta_{m\ell m'\ell}$$

$(\hat{L}_z)_{\ell m_{\ell,} \ell' m'_\ell}$ memiliki harga hanya jika $\ell' = \ell$ dan $m_\ell = m'_\ell$. Jadi dengan $\ell = 0,1,2$ ..., matriks $\hat{L}_z$ adalah

$\ell = 0; \qquad \ell = 1; \qquad \ell = 2$

$$\hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah matriks $\hat{L}_z$ dengan basis fungsi-fungsi $Y_{\ell m_\ell}$ untuk $\ell = 0{,}1{,}2$. Berdasarkan persamaan $\hat{L}^2 Y_{\ell m_\ell} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m_{\ell m}}$; maka:

Jawab:

$$(L^2)_{\ell m_\ell \ell' m'_\ell} = \int Y^*_{\ell', m'_\ell} \hat{L}^2 Y_{\ell, m_\ell} sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \hbar^2 \ell(\ell+1) \int Y^*_{\ell', m'_\ell} Y_{\ell, m_\ell} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \hbar^2 \ell(\ell+1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{m\ell m'\ell}$$

$(\hat{L}_z)_{\ell m_{\ell}, \ell' m'_\ell}$ memiliki harga hanya jika $\ell' = \ell$ dan $m_\ell = m'_\ell$. Jadi, dengan $\ell = 0{,}1{,}2 \ldots$, matriks $\hat{L}^2$ adalah

$\ell = 0$; $\ell = 1$; $\ell = 2$

$$\hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 2 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 2 & 0 & & & & & \\ & & & & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Operator $\hat{L}_+$ dan Operator $\hat{L}_-$

Sehubungan dengan operator $\hat{L}_\pm$ yang telah didefinisikan dalam persamaan $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ akan kemukakan karakteristik operasinya terhadap fungsi harmonik bola Y_{ℓ,m_ℓ}. Karena $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$ maka:

$$\hat{L}_z\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell} = \left(\hat{L}_+\hat{L}_z + \hbar\hat{L}_+\right)Y_{\ell m_\ell} = (m_\ell + 1)\hbar\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell}$$

$$\hat{L}_z\hat{L}_-Y_{\ell m_\ell+1} = \left(\hat{L}_-\hat{L}_z - \hbar\hat{L}_-\right)Y_{\ell m_\ell+1} = m_\ell\hbar\hat{L}_-Y_{\ell m_\ell+1}$$

Jelas bahwa $\hat{L}_-Y_{\ell m_\ell}$ adalah fungsi eigen dari $\hat{L}_z$ dengan nilai eigen $(m_\ell + 1)\hbar$. Nilai eigen ini merupakan hasil operasi $\hat{L}_z$ terhadap $Y_{\ell m_\ell+1}$, oleh sebab itu:

$$\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell} = CY_{\ell m_\ell+1}$$

Demikian pula $(\hat{L}_-Y_{\ell m_\ell+1})$ adalah fungsi eigen dari $\hat{L}_z$ dengan nilai eigen $m_\ell = \hbar$. Padahal nilai eigen ini merupakan hasil operasi $\hat{L}_z$ terhadap $Y_{\ell m_\ell}$. Jadi,

$$\hat{L}_-Y_{\ell m_\ell+1} = CY_{\ell m_\ell}$$

Dengan kedua persamaan diatas, maka:

$$\hat{L}_-\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell} = C^2Y_{\ell m_\ell}$$

Di pihak lain,

$$\hat{L}_-\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell} = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_2Y_{\ell m_\ell} = [\hbar^2\ell(\ell + 1) - m_\ell(m_\ell + 1)\hbar]Y_{\ell m_\ell}$$

Sehingga diperoleh,

$$C^2 = \hbar^2\ell(\ell + 1) - m_\ell(m_\ell + 1)\hbar$$

Dengan demikian maka sifat operasi operator $\hat{L}_\pm$ adalah:

$$\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell} = \hbar\sqrt{\ell(\ell + 1) - m_\ell(m_\ell + 1)}Y_{\ell m_\ell+1}$$

$$\hat{L}_-Y_{\ell m_\ell} = \hbar\sqrt{\ell(\ell + 1) - m_\ell(m_\ell - 1)}Y_{\ell m_\ell-1} \qquad (75)$$

Kedua persamaan di atas bukan persamaan nilaieigen, karena operator-operator itu menggeser bilangan kuantum m_ℓ. Operator $\hat{L}_+$ menambahkan bilangan kuantum m_ℓ menjadi $m_\ell + 1$, sedangkan $\hat{L}_-$ menguranginya dari m menjadi $m_\ell - 1$. Oleh sebab itu, kedua operator itu disebut sebagai operator tangga (step operator).

Contoh Soal:

Tentukan matriks $\hat{L}_+$ dengan basis fungsi-fungsi $Y_{\ell m_\ell}$ untuk $\ell = 0,1,2$. Berdasarkan persamaan $\hat{L}_+Y_{\ell m_\ell} = \hbar\sqrt{\ell(\ell + 1) - m_\ell(m_\ell + 1)}Y_{\ell m_\ell+1}$ maka

$$(\hat{L}_+)_{\ell\prime,m\prime_\ell;\ell,m_\ell} \qquad = \int Y_{\ell\prime,m\prime_\ell} \hat{L}_+ Y_{\ell m_\ell}\, sin\theta\ \ d\varphi$$

$$= \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell(m_\ell+1)} \int Y_{\ell',m'_\ell} Y_{\ell m_\ell+1}\, sin\theta\, d\varphi$$

$$= \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell(m_\ell+1)}\delta_{\ell\prime\ell}\delta_{m\prime\ell,m_\ell+1}$$

$\widehat{(L_+)}_{\ell\prime,m\prime_\ell;\ell,m_\ell}$ memiliki harga hanya jika $\ell' = \ell$ dan $m'_\ell = m_\ell + 1$. Jadi dengan $\ell = 0,1,2 \ldots$, matriks $\hat{L}_+$:

$\ell = 0$ $\qquad$ $\ell = 1$ $\qquad$ $\ell = 2$

$$\hat{L}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & \sqrt{2} & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soal Latihan:

1. Buktikan $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$.
2. Buktikan $[\hat{L}^2, \hat{L}_j] = 0, j = x, y, z$.
3. Dengan $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, buktikan: $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$, $\hat{L}_+, \hat{L}_- = 2\hbar\hat{L}_z$, dan $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$. Butikan: $\hat{L}_-, \hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$.
4. Nyatakanlah operator $\hat{L}_+$ dalam bentuk matriks dengan basis harmonik bola $Y_{\ell m_\ell}$ dengan $\ell = 3$. Hal yang sama untuk operator $\hat{L}_-$.
5. Nyatakanlah operator $\hat{L}_x$ dalam bentuk matriks dengan basis harmonik bola $Y_{\ell m_\ell}$ dengan $\ell = 0,1,2$. Hal yang sama untuk operator $\hat{L}_y$.

DAFTAR PUSTAKA

Nurlina. 2017. *Fisika Kuantum*. Makassar: LPP Unismuh Makassar.

Siregar, R.E. 2018. *Fisika Kuantum*. Jatinangor: Fakultas MIPA Universitas Padjadjaran.