KALKULUS

Sri Maryani, Ph.D

Department Mathematics
Jenderal Soedirman University

2020. 9. 15

Outline

Outline

Pertaksamaan

Konsep Pertaksamaan

Pertaksamaan satu peubah ialah bentuk matematika dengan satu peubah real yang disertai relasi urutan $<$, $>$, $\leq$ atau $\geq$.

- Peubah ialah lambang yang digunakan untuk mewakili unsur suatu himpunan. *Peubah real* ialah lambang yang digunakan untuk menyatakan suatu bilangan real. Contoh : $f(x) = 2x + 3$
- Konstanta ialah lambang yang digunakan untuk mewakili himpunan berunsur satu. Contoh: $f(x) = 2x + 3$
- Parameter ialah lambang yang digunakan untuk mewakili unsur suatu himpunan konstanta. Contoh : $x(t) = t - 2$, untuk $0 < t < 1$

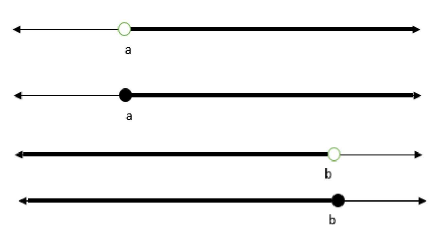
Selang (Interval)

Selang ialah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang memenuhi suatu ketaksamaan tertentu.

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Selang Tak Berhingga

- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\}$



Pertaksamaan Rasional

Bentuk Umum

Bentuk umum suatu pertaksamaan rasional ialah

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$$

dengan A, B, C dan D suku banyak. Tanda $<$ dapat diganti oleh $>$, $\leq$ atau $\geq$.

Pertaksamaan Rasional

Langkah-langkah penyelesaian pertaksamaan rasional adalah:

(1) Ubah pertaksamaannya menjadi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

dengan melakukan operasi pengurangan, penyamaan penyebut, dan penyederhanaan bentuk aljabarnya.

(2) Uraikan P dan Q atas faktor linear dan/atau kuadrat definit positif.

(3) Tentukan pembuat nol dari faktor-faktor linear dari poin kedua

(4) Gambarkan nilai batas pertaksamaan pada garis bilangan

(5) Tentukan tanda pertaksamaan di setiap selang

(6) Tentukan himpunan jawab

Latihan

Pertaksamaan

Tentukan Himpunan Jawab dari pertaksamaan di bawah ini!

(1) $x^4 - x^2 < 0$

(2) $2 \leq x^2 - x < 6$

(3)
$$\frac{2}{x} \geq x + 1$$

(4)
$$\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$$

(5)
$$\frac{x-2}{x^2} \leq \frac{x+1}{x+3}$$

Latihan

Tentukan Himpunan Jawab dari pertaksamaan di bawah ini!

(1) $x^4 - x^2 < 0$

jawab:

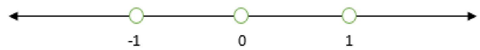
(a) Ubah pertaksamaannya menjadi
$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$
Soal di atas sudah berbentuk seperti di atas

(b) Uraikan menjadi faktor linear dan/atau kuadrat definit positif.
$$x^4 - x^2 < 0$$
$$x^2(x^2 - 1) < 0$$
$$x^2(x+1)(x-1) < 0$$

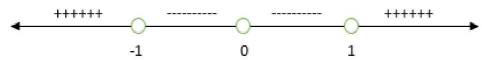
(c) Tentukan pembuat nol $x = 0$, $x = -1$ dan $x = 1$

Latihan (Lanjutan)

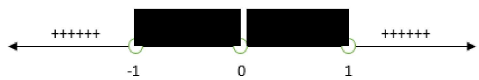
(d) Gambarkan nilai batas pertaksamaan pada garis bilangan



(e) Tentukan tanda pertaksamaan di setiap selang



(f) Tentukan himpunan jawab



atau $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \cup 0 < x < 1\}$ atau HP $= (-1, 0) \cup (0, 1)$
atau HP $= (-1, 1) - \{0\}$

Latihan

Tentukan Himpunan Jawab dari pertaksamaan di bawah ini!

(3) $\frac{2}{x} \geq x + 1$

jawab:

(a) Ubah pertaksamaannya menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} &\geq x + 1 \\
\frac{2}{x} - (x + 1) &\geq 0 \\
\frac{2 - x(x + 1)}{x} &\geq 0 \\
\frac{2 - x^2 - x}{x} &\geq 0 \\
-\frac{x^2 + x - 2}{x} &\geq 0
\end{aligned}$$

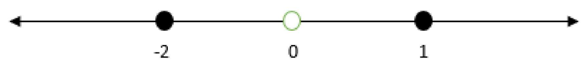
Latihan (Lanjutan)

(b) Uraikan menjadi faktor linear dan/atau kuadrat definit positif.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0$$
$$\frac{(x+2)(x-1)}{x} \leq 0$$

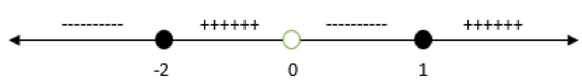
(c) Pembuat nol $x = 0$, $x = -2$ dan $x = 1$

(d) Gambarkan nilai batas pertaksamaan pada garis bilangan

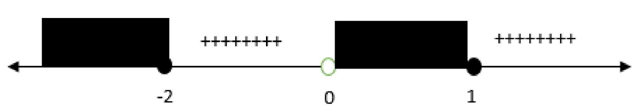


Latihan (Lanjutan)

(e) Tentukan tanda pertaksamaan di setiap selang



(f) Tentukan himpunan jawab



HP = $(-\infty, -2] \cup (0, 1]$

Latihan

Tentukan Himpunan Jawab dari pertaksamaan di bawah ini!

(4) $\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$

jawab:

(a) Ubah pertaksamaannya menjadi

$$\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$$
$$\frac{x+1}{2-x} - \frac{x}{x+3} \geq 0$$
$$\frac{(x+1)(x+3) - x(2-x)}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$
$$\frac{x^2 - 2x + x^2 + 4x + 3}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$
$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

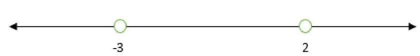
Latihan (Lanjutan)

(b) Karena pembilang $2x^2 + 2x + 3$ definit positif, maka pertaksamaan setara dengan

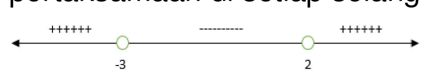
$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} \leq 0$$

(c) Pembuat nol $x = -3$ dan $x = 2$

(d) Gambarkan nilai batas pertaksamaan pada garis bilangan



(e) Tentukan tanda pertaksamaan di setiap selang



(f) Tentukan himpunan jawab

HP = $(-3, 2)$

Jarak antara dua buah Titik

Jadi, $d(a,b) = \begin{cases} b-a & \text{Jika } a < b \\ a-b & \text{Jika } a > b \\ 0 & \text{Jika } a = b \end{cases}$

Nilai Mutlak

Arti Geometri

Jarak titik itu ke titik asal 0.

Jarak titik x ke titik 0 dapat di tuliskan

$$d(x,0) = \begin{cases} x-0 & \text{Jika } 0 < x \\ 0-x & \text{Jika } 0 > x \\ 0 & \text{Jika } x = 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x & \text{Jika } 0 < x \\ -x & \text{Jika } 0 > x \\ 0 & \text{Jika } x = 0 \end{cases}$$

Sehingga, definisi dari $|x|$ adalah $|x| = \begin{cases} x & \text{Jika } x \geq 0 \\ -x & \text{Jika } x < 0 \end{cases}$

Nilai Mutlak (Lanjutan)

Teorema (Sifat-Sifat Nilai Mutlak)

1. Untuk setiap bilangan real x berlaku
   (a) $|x| \geq 0$
   (b) $|-x| = |x|$
   (c) $-|x| \leq x \leq |x|$
   (d) $x^2 = |x|^2 = |x^2|$
2. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku
   (a) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
   (b) $|x - y| = |y - x|$
3. Jika $a \geq 0$ maka
   (a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$
   (b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ atau $x \leq -a \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$

Latihan

Nilai Mutlak

1. Ubahlah bentuk aljabar berikut ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak!
   (a) $|2x - 1|$
   (b) $2|x| + |x - 1|$
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertaksamaan di bawah ini!
   (a) $|2x + 1| \leq 3$
   (b) $|3x - 2| \geq 1$
   (c) $|2x + 3| \leq |x - 3|$
   (d) $\frac{|x^2-2|}{|x|} \geq |x|$
   (e) $(2x - 5)^2 - 3|2x - 5| > 10$
   (f) $|x - 2| \leq x|x|$

Latihan

Ubahlah bentuk aljabar berikut ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak!

(a) $|2x-1|$

Jawab: Berdasarkan definisi nilai mutlak, kita peroleh

$$\begin{aligned} |2x-1| &= \begin{cases} 2x-1 & \text{Jika } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & \text{Jika } 2x-1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x-1 & \text{Jika } x \geq 1/2 \\ 1-2x & \text{Jika } x < 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Latihan

Ubahlah bentuk aljabar berikut ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak!

(b) $2|x| + |x-1|$

Jawab: Berdasarkan definisi nilai mutlak, kita peroleh

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Jika } x \geq 0 \\ -x & \text{Jika } x < 0 \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{Jika } x \geq 1 \\ 1-x & \text{Jika } x < 1 \end{cases}$$

Latihan (Lanjutan)

$x < 0$	$0 \le x < 1$	$x \ge 1$
$\lvert x\rvert = -x$ $\lvert x-1\rvert = 1-x$	$\lvert x\rvert = x$ $\lvert x-1\rvert = 1-x$	$\lvert x\rvert = x$ $\lvert x-1\rvert = x-1$
$2\lvert x\rvert + \lvert x-1\rvert =$	$2\lvert x\rvert + \lvert x-1\rvert =$	$2\lvert x\rvert + \lvert x-1\rvert =$
$=2(-x)+(1-x)$ $= -2x - x + 1$ $= -3x + 1$	$=2(x)+(1-x)$ $= 2x - x + 1$ $= x + 1$	$=2(x)+(x-1)$ $= 3x - 1$

Jadi, $2|x| + |x-1|$ tanpa memuat nilai mutlak dapat dituliskan sebagai berikut:

$$2|x| + |x-1| = \begin{cases} 3x - 1 & \text{Jika } x \ge 1 \\ x + 1 & \text{Jika } 0 \le x < 1 \\ -3x + 1 & \text{Jika } x < 0 \end{cases}$$

Latihan

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertaksamaan

$$|2x + 1| \le 3$$

Jawab: Berdasarkan sifat dari nilai mutlak, maka

$$|2x + 1| \le 3$$
$$-3 \le 2x + 1 \le 3$$

sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow (2x + 1) \ge -3 \text{ dan } (2x + 1) \le 3$$
$$\Leftrightarrow 2x \ge (-3 - 1) \text{ dan } 2x \le (3 - 1)$$
$$\Leftrightarrow 2x \ge -4 \text{ dan } 2x \le 2$$
$$\Leftrightarrow x \ge -2 \text{ dan } x \le 1$$

Jadi, Himpunan penyelesaian dari pertaksamaan nilai mutlak tersebut adalah: $HP = \{-2 \le x \le 1\} = [-2, 1]$