

Definisi, Latar Belakang dan Motivasi

Apakah limit itu?

- Batas
- Membatasi
- Mempersempit
- Mendekatkan

Latar Belakang : Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering dihadapkan pada permasalahan ”hampiran” suatu nilai.

Contohnya :

- Nilai ujian kalkulus Yuswa hampir 100
- IPK sebagian besar mahasiswa Jurusan Kimia angkatan 2019 hampir mendekati 3,5
- ... dst

Limit di satu titik

Pengertian limit secara intuitisi.
Perhatikan fungsi

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di $x = 1$, karena di titik tersebut $f(x)$ berbentuk $0/0$. Namun kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada $f(x)$ ketika x mendekati 1.

x	1,25	1,1	1,01	1,001	1	0,999	0,99	Secara
$f(x)$	3,813	3,310	3,030	3,003	3	2,997	2,970	

matematis, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Dibaca "Limit dari $\frac{x^3-1}{x-1}$ ketika x mendekati 1 adalah 3.

Limit di satu titik (Lanjutan)

Pengertian limit secara intuitisi.

Perhatikan fungsi lainnya

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di $x = 0$, karena di titik tersebut $f(x)$ berosilasi. Namun kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada $f(x)$ ketika x mendekati 0.

x	$2/\pi$	$2/(2\pi)$	$2/(3\pi)$	$2/(4\pi)$	$2/(5\pi)$	$2/(6\pi)$	$2/(7\pi)$
$f(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1

Secara matematis, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ Tidak ada.}$$

CONTOH

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} 5x + 2 = -3$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x} = \frac{8 - 4 + 1}{4 - 6} = -2\frac{1}{2}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

Definisi limit

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \epsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$; yakni

$$0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Contoh :

Buktikan bahwa limit

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} 5x + 2 = -3$

(3) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c . Maka

- (1) $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- (2) $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- (3) $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- (5) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- (6) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
- (7) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$
- (8) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{1/n} = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^{1/n}$

(9) Limit suku banyak berderajat- n

Jika $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ maka

$$\lim_{x \rightarrow c} P_n(x) = P_n(c)$$

(10) Jika $f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$; dengan $P_n(x)$ dan $P_m(x)$ adalah suku banyak, maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ dimana $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid P_m(x) \neq 0\}$

1 Hitunglah setiap limit yang diberikan

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Outline

- 1 Sistem Bilangan Real
 - Pertaksamaan dan Nilai Mutlak
 - Fungsi Real
- 2 **LIMIT**
 - Limit Fungsi
 - **Limit Kiri dan Limit Kanan**
 - Limit Fungsi Trigonometri
 - Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi
- 3 Kekontinuan Fungsi
 - Fungsi Kontinu
- 4 Turunan
 - Turunan di satu titik
 - Turunan pada suatu selang
 - Laju Yang berkaitan
 - Aplikasi Turunan
 - Aplikasi turunan pada perhitungan limit fungsi

Definisi

Limit Kiri

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

Menyatakan bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kiri c , maka $f(x)$ dekat ke L

Limit Kanan

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Menyatakan bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kanan c , maka $f(x)$ dekat ke L

Teorema

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Contoh

Gambarkan grafik dari fungsi di bawah ini

$$(1) f(x) = \begin{cases} -x & \text{Jika } x < 0 \\ x & \text{Jika } 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & \text{Jika } x \geq 1 \end{cases}$$

Kemudian cari masing-masing limit berikut ini (jika ada)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- (e) $f(1)$

Contoh (Lanjutan)

Gambarkan grafik dari fungsi di bawah ini

$$(2) g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{Jika } x < 1 \\ x - 1 & \text{Jika } 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{Jika } x \geq 2 \end{cases}$$

Kemudian cari masing-masing limit berikut ini (jika ada)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$
- (b) $g(1)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Outline

- 1 Sistem Bilangan Real
 - Pertaksamaan dan Nilai Mutlak
 - Fungsi Real
- 2 **LIMIT**
 - Limit Fungsi
 - Limit Kiri dan Limit Kanan
 - **Limit Fungsi Trigonometri**
 - Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi
- 3 Kekontinuan Fungsi
 - Fungsi Kontinu
- 4 Turunan
 - Turunan di satu titik
 - Turunan pada suatu selang
 - Laju Yang berkaitan
 - Aplikasi Turunan
 - Aplikasi turunan pada perhitungan limit fungsi

Teorema

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \tan 0 = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

CONTOH

Hitunglah limit trigonometri di bawah ini!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x+1}$

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t}{1+\sin t}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+\sin 4x}{5x-\tan 2x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2+\tan^2 3x}$

(e) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{\tan \theta}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \tan x}{\sin x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x-\pi/2}$