

# Limit Tak Hingga

## Teorema

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty, n \in \mathbb{N}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty, n \in \text{Bilangan Genap Positif}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty & \text{Jika } n \text{ bilangan genap positif} \\ -\infty & \text{Jika } n \text{ bilangan ganjil positif} \end{cases}$

# Limit di Tak Hingga

## Teorema

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}$

Contoh

Hitunglah

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + 3x}$

# Latihan

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

# Outline

- 1 Sistem Bilangan Real
  - Pertaksamaan dan Nilai Mutlak
  - Fungsi Real
- 2 **LIMIT**
  - Limit Fungsi
  - Limit Kiri dan Limit Kanan
  - Limit Fungsi Trigonometri
  - **Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi**
- 3 **Kekontinuan Fungsi**
  - Fungsi Kontinu
- 4 **Turunan**
  - Turunan di satu titik
  - Turunan pada suatu selang
  - Laju Yang berkaitan
  - Aplikasi Turunan
  - Aplikasi turunan pada perhitungan limit fungsi

# Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi

## Bentuk Tak Tentu 0/0

Jika diketahui  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

$(x \rightarrow c)$  dapat diganti oleh  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ , atau  $x \rightarrow -\infty$

Contoh

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{2 + 1}{2 + 2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

# Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi (Lanjutan)

## Bentuk Tak Tentu $\infty/\infty$

Jika diketahui  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)|$

$(x \rightarrow c)$  dapat diganti oleh  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ , atau  $x \rightarrow -\infty$

Contoh

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x-2}}{x-4}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x-2}}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

# Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi (Lanjutan)

## Bentuk Tak Tentu $0 \cdot \infty$

Jika diketahui  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$  dengan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  dan

$$\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty$$

$(x \rightarrow c)$  dapat diganti oleh  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ , atau  $x \rightarrow -\infty$

*Cara Penyelesaian* : Tulislah  $f(x)g(x)$  sebagai  $\frac{f(x)}{1/g(x)}$  untuk

memperoleh bentuk  $0/0$  atau sebagai  $\frac{g(x)}{1/f(x)}$  untuk memperoleh bentuk  $\infty/\infty$ .

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

Jawab:

Karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t}$$

# Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi (Lanjutan)

## Bentuk Tak Tentu $\infty - \infty$

Jika diketahui  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)]$  dengan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$(x \rightarrow c)$  dapat diganti oleh  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$ , atau  $x \rightarrow -\infty$

*Cara Penyelesaian* : Ubah menjadi bentuk limit  $\frac{\infty}{\infty}$ .

$$\text{Hitunglah } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1-x}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = 0 \end{aligned}$$



# LATIHAN

Hitunglah limit dibawah ini!

1  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x-1}$

2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x-1}$

3  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$

4  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - 3x} + x \right)$

5 Tentukan konstanta  $a$  dan  $b$  agar

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{ax + b\sqrt{x} - 2} = 8$$