Definisi

Turunan di satu titik

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval buka yang memuat c. *Turunan pertama* dari fungsi f di titik c, ditulis $f'(c)$ didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

jika limitnya ada.

Dengan penggantian $x = c + h$ yang mengakibatkan $x \to c \Leftrightarrow h \to 0$ dan $x - c = h$. Turunan fungsi f di titik c dapat dituliskan dalam bentuk

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Contoh 1

Jika $f(x) = \frac{1}{x}$, hitunglah $f'(2)$.
Jawab:

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Contoh 1 (Cara Lain)

Jika $f(x) = \frac{1}{x}$, hitunglah $f'(2)$.
Jawab:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2 - h}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Turunan Kiri dan Turunan Kanan

Turunan Kiri

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval selang $(a, c]$. Turunan kiri dari fungsi f di c, ditulis $f'_{-}(c)$didefinisikan sebagai

$$f'_{-}(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{atau } f'_{-}(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

jika limitnya ada.

Turunan Kanan

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval selang $(a, c]$. Turunan Kanan dari fungsi f di c, ditulis $f'_{+}(c)$didefinisikan sebagai

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{atau } f'_{+}(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

jika limitnya ada.

Turunan Kiri dan Turunan Kanan

Teorema

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval buka I yang memuat c. Maka fungsi f terdifferensialkan di c. Jika dan hanya jika

$$f'_{-}(c) = f'_{+}(c)$$

Turunan Kiri dan Turunan Kanan

Contoh Turunan Kiri dan Turunan Kanan

Jika diketahui

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

Tunjukkan apakah fungsi f terdifferensialkan di $x = 1$!

Hubungan antara fungsi terdifferensialkan dan Kekontinuan

Teorema

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval buka I yang memuat c. Jika fungsi f terdifferensialkan di c maka fungsi f kontinu di c.

Contoh: Tentukan konstanta a dan b agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & 0 < x \leq 2 \\ x^2 + bx & x > 2 \end{cases}$$

terdifferensialkan di $x = 2$.

Outline

Definisi

Turunan pada suatu selang

Misalkan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada selang I. *Turunan pertama* dari fungsi f pada selang I, ditulis f' adalah suatu fungsi yang aturannya di setiap $x \in I$ ditentukan oleh

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \text{ atau } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

jika limitnya ada.

Lambang lain untuk turunan adalah y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $D_x y$, $D_x f(x)$

Latihan

Dengan menggunakan definisi turunan, tentukan turunan pertama dari

1. $$\frac{d}{dx}(\sin x)$$

2. $$\frac{d}{dx}(\cos x)$$

Aturan untuk menentukan turunan

1. Turunan jumlah, selisih, hasil kali dan hasil bagi dua fungsi.
   - $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
   - $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
   - $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
2. Turunan fungsi trigonometri
   - $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
   - $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
   - $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
   - $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
   - $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
   - $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Aturan untuk menentukan turunan

1. Aturan fungsi eksponensial
   - $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$
   - $f(x) = e^x$. $\frac{dy}{dx} = e^x \ln e = e^x$
2. Aturan fungsi logaritma
   - $f(x) = {}^a\log x$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$
   - $f(x) = \ln x$, $x > 0$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
3. Aturan fungsi trigonometri balikan
   - $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   - $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   - $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
   - $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$
   - $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
   - $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Aturan untuk menentukan turunan

1. Aturan fungsi hiperbolik
   - $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
   - $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
2. Aturan fungsi hiperbolik balikan
   - $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
   - $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$