Anti turunan

Definisi Anti-Turunan

Fungsi F dikatakan anti turunan dari fungsi f pada interval I, jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I, yakni jika berlaku $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam interval I.

Notasi Anti-Turunan

- $A_x(x^2) = \frac{1}{3}x^3 + C$
- $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ Notasi Leibniz

Anti turunan

Theorema

Jika F anti-turunan dari f pada interval I, maka anti-turunan dari f pada I yang paling umum adalah

$$F(x) + C$$

dengan C konstanta sembarang.

Anti turunan

Trigonometri

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Integral Tak-Tentu bersifat Linier

Misalkan f dan g mempunyai anti-turunan (integral tak-tentu) dan misalkan k suatu konstanta, maka

- $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Anti turunan

Aturan pangkat yang Digeneralisir

Misalkan g suatu fungsi yang dapat didifferensialkan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1, maka

$$\int [g(x)]^r \, g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Contoh

Tentukan integral di bawah ini!

- $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\, dx$
- $\int \sin^{10} x \cos x\, dx$
- $\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\, dx$
- $\int (x^2 + 4)^{10} x\, dx$

Rumus-rumus Integral Tak Tentu

Rumus-rumus Integral Tak Tentu

$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$	$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$
$\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$	$\int \sec ax \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\sec ax + C$
$\int \csc ax \cot ax\, dx = -\frac{1}{a}\csc ax + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C,\quad a > 0$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C,\quad a > 0$	$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\int b^{ax}\, dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax} + C$	$\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$
$\int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$	$\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\qquad r \neq -1$

Latihan

Tentukan integral di bawah ini!

(1) $\int (x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 6x - 7)\, dx$

(2) $\int 4\cos 5x - 5\sin 3x\, dx$

(3) $\int 5x^{3/5} - \frac{1}{\pi x}\, dx$

(4) $\int \frac{(x+1)^3}{x}\, dx$

Metode Substitusi

Metode Substitusi

Ketika integral tersebut tidak bisa kita cari solusinya secara langsung, maka dapat dilakukan dengan menggunakan Metode Substitusi yang merupakan integral versi aturan rantai (*Chain Rule*).

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$d[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$\int d[f(g(x))] = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$f(g(x)) + C = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$$

Latihan

Tentukan integral di bawah ini!

(1) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

(2) $\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\, dx$

(3) $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(6) $\int \sqrt{3x+4}\, dx$

(7) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

(8) $\int xe^{x^2}\, dx$

(9) $\int x^2 2^{x^3+1}\, dx$

(10) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\, dx$

Persamaan Differensial

Aplikasi dari Integral Tak tentu

Jika suatu benda mempunyai fungsi posisi $s = f(t)$, maka fungsi kecepatan $v(t) = s'(t)$. Ini bermakna bahwa fungsi posisi sebagai anti turunan dari kecepatan. Hal yang sama untuk fungsi percepatan, fungsi percepatan kita tahu bahwa $a(t) = v'(t)$, sehingga fungsi kecepatan adalah anti turunan dari fungsi percepatan.

Contoh:
Suatu partikel bergerak menurut garis lurus dan mempunyai percepatan yang diberikan oleh $a(t) = 6t + 4$. Kecepatan awalnya adalah $v(0) = -6$cm/detik dan simpangan awalnya $s(0) = 9cm$. Tentukan fungsi posisi $s(t)$.

Latihan

1. Partikel bergerak dengan data di bawah ini. Carilah posisi partikel jika diketahui

$$a(t) = \cos t + \sin t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 5$$

2. Sebuah bola dilemparkan ke atas dengan kecepatan $48 kaki/detik$ dari tepi jurang 432 kaki di atas permukaan tanah. Carilah ketinggiannya di atas permukaan tanah t detik kemudian. Kapan dia mencapai ketinggian maksimum? Kapan dia membentur tanah? (percepatan gravitasi $9,8 m/s^2 = 32 kaki/s^2$

Outline

Jumlah dan Notasi Sigma

Definisi Notasi Sigma

Jika m dan n adalah bilangan bulat dengan $m \leq n$, dan jika f adalah suatu fungsi yang bergantung pada bilangan bulat m, $m+1$, $m+2$, $\ldots$, n, simbol $\Sigma_{i=m}^{n} f(i)$ merepresentasikan jumlah dari nilai f

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n)$$

Contoh

1. $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$
2. $\sum_{j=1}^{20} j = 1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \ldots$
3. $\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n$
4. $\sum_{m=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-suku}$

Perubahan Indeks

Untuk suatu jumlah tertentu, kadang-kadang diperlukan merubah indeks dalam penjumlahan.

Contoh

1. $\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(m+n)$
2. $\sum_{i=0}^{n} f(i+m) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(m+n)$
3. Nyatakan $\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1+j^2}$ dalam bentuk $\sum_{i=1}^{n} f(i)$

Rumus Penjumlahan

Teorema 1

1. $\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-suku} = n$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$, Untuk $r \neq 1$

Latihan

1. Uraikan notasi sigma berikut:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

2. Tuliskan deret berikut dalam bentuk notasi sigma
   (a) $2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \ldots - 99^2$
   (b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$
   (c) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + x^{2n}$
   (d) $2 + 2 + 2 + \ldots + 2 \qquad (200)$ suku
3. Tentukan jumlah dari masing-masing deret pada no. 2
4. Tuliskan n buah dari identitas $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$, $\forall k = 1, \ldots, n$ kemudian jumlahkan untuk mendapatkan bentuk notasi sigma

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$