Luas Daerah Sebagai Limit dari Penjumlahan

Definisi

1. Luas daerah dari daerah bidang datar adalah bilangan real non negatif dari satuan kuadrat
2. Luas daerah persegi panjang dengan panjang w dan lebar ℓ adalah $A = w\ell$
3. Luas daerah dari bidang datar yang kongruen adalag sama
4. Jika daerah S termuat pada daerah R maka luas daerah dari S kurang dari tau sama dengan luas daerah R
5. Jika daerah R merupakan gabungan dari berhingga daerah yang tidak overlapping maka daerah R merupakan jumlah dari semua daerah tersebut

Integral Riemann

n	L_n	R_n
10	0,285000	0,385000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Masalah Luas daerah

Bagaimana mencari luas daerah R yang terletak di bawah kurva kontinu $y = f(x)$ diatas sumbu-x dan terletak antara garis vertikal $x = a$ dan $x = b$, dimana $a < b$. Dengan membagi interval $[a, b]$ menjadi n-sub interval yang sama panjang, dengan menggunakan pembagian titik

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Notasikan, Δx_i sebagai panjang dari sub interval ke-i, $[x_{i-1}, x_i]$, yaitu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Luas daerah masing-masing persegi panjang adalah $f(x_i)\Delta x_i$, sehingga diperoleh jumlah dari masing-masing luas daerah tersebut:

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

Masalah Luas daerah (Lanjutan)

Untuk menghitung luas daerah R dapat diperoleh dengan mencari limit dari S_n ketika $n \to \infty$, dengan syarat sub interval terbesar dari Δx_i mendekati 0

$$\begin{aligned} \text{Luas Daerah R} &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

Kadang-kadang, untuk sub interval yang sama Δx_i, dituliskan

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

Integral Tentu

Partisi dan Jumlah Riemann

Misalkan integral tentu dari fungsi f pada interval I. P adalah himpunan berhingga titik-titik antara a dan b, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, P dinamakan partisi dari $[a, b]$ dan membagi $[a, b]$ menjadi n subinterval, dengan interval ke-i adalah $[x_{i-1}, x_i]$. Panjang dari subinterval ke-i dari P adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad$ (for $1 \leq i \leq n$). Bilangan terbesar Δx_i merupakan norm dari partisi P dan dinotasikan sebagai $||P|| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Integral Tentu (Lanjutan)

Partisi dan Jumlah Riemann

Karena fungsi f kontinu pada setiap sub interval $[x_{i-1}, x_i]$ dari P, sehingga terdapat maksimum dan minimum pada interval tersebut. Misalkan l_i dan u_i merupakan titik minimum dan maksimum pada interval $[x_{i-1}, x_i]$, sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
&f(l_i) \le f(x) \le f(u_i), \quad x_{i-1} \le x \le x_i \\
&f(l_i)\Delta x_i \le f(x)\Delta x \le f(u_i)\Delta x_i \\
&f(l_i)\Delta x_i \le f(u_i)\Delta x_i
\end{aligned}
$$

Jumlah Riemann Atas dan bawah

Definisi

Jumlah Riemann bawah dinotasikan dengan $L(f, P)$ dan jumlah Riemann atas dinotasikan $U(f, P)$ pada fungsi f dan partisi P didefinisikan sebagai :

$$
\begin{aligned}
L(f, P) &= f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \cdots + f(l_n)\Delta x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i \\
U(f, P) &= f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \cdots + f(u_n)\Delta x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i
\end{aligned}
$$

Contoh

1. Hitunglah jumlah Riemann bawah dan Riemann atas untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ pada interval $[1, 2]$ dengan membagi fungsi menjadi $x_0 = 1$, $x_1 = 5/4$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 7/4$ dan $x_4 = 2$.
2. Hitunglah Jumlah Riemann bawah dan Riemann atas untuk fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, a]$, dengan $a > 0$. Dengan membuat partisi $[0, a]$ menjadi n-subinterval yang sama.