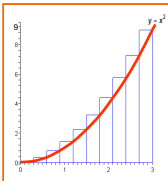
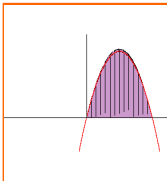


## Penggunaan Integral

1. Luas Daerah Bidang Rata
2. Volume Benda Dalam Ruang: Cakram, Cincin, Kulit Tabung

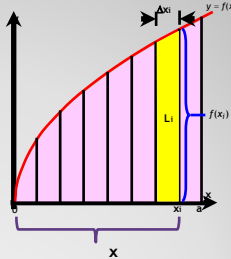



### Menghitung Luas dengan Integral

Luas Daerah

Langkah-langkah dalam menghitung luas daerah dengan integral tentu adalah:

1. Gambar daerahnya.
2. Partisi daerahnya
3. Aproximasi luas sebuah partisi
 
$$L_i \approx f(x_i) \Delta x_i$$
4. Jumlahkan luas partisi
 
$$L \approx \sum f(x_i) \Delta x_i$$
5. Ambil limitnya  $L = \lim \sum f(x_i) \Delta x_i$
6. Nyatakan dalam integral
 
$$L = \int_0^a f(x) dx$$



Home Back Next

### Menghitung Luas dengan Integral

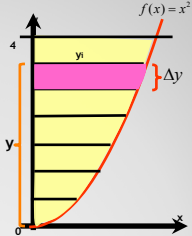
Luas Daerah

**Contoh 1**  
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = x^2$ , sumbu Y, dan garis  $y = 4$

**Jawab**

Langkah penyelesaian :

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproximasi luasnya  $L \approx \sum y_i \cdot \Delta y$
4. Jumlahkan luasnya  $L = \lim \sum y_i \cdot \Delta y$
5. Ambil limit jumlah luasnya  $L = \lim \sum \sqrt{y} \cdot \Delta y$
6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya  $L = \int_0^4 \sqrt{y} \cdot dy$

$$L = \left[ \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$


Home Back Next

### Menghitung Luas dengan Integral

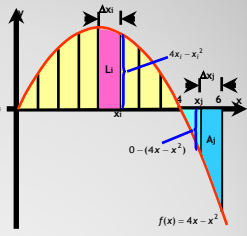
Luas Daerah

**Contoh 2**  
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = 4x - x^2$ , sumbu x, dan garis  $x = 6$

**Jawab**

Langkah penyelesaian:

1. Gambar dan Partisi daerahnya
2. Aproximasi :  $L_i \approx (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$  dan  $A_j \approx -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
3. Jumlahkan :  $L \approx \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$  dan  $A \approx \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
4. Ambil limitnya  $L = \lim \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$  dan  $A = \lim \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
5. Nyatakan dalam integral
 
$$L = \int_0^4 (4x - x^2) dx \quad A = \int_4^6 -(4x - x^2) dx$$



Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

$$L = \int_0^4 (4x - x^2) dx$$

$$L = \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4$$

$$L = 2(4)^2 - \frac{1}{3}(4)^3 - 0 = 32 - \frac{64}{3}$$

$$A = \int_4^6 -(4x - x^2) dx$$

$$A = \left[ -2x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_4^6$$

$$A = -2(6)^2 + \frac{1}{3}(6)^3 - \left( -2(4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3 \right)$$

$$A = -72 + \frac{216}{3} + 32 - \frac{64}{3}$$

$$A = \frac{152}{3} - 40$$

Luas daerah =  $32 - \frac{64}{3} + \frac{152}{3} - 40 = 21\frac{1}{3}$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

Kesimpulan

$$L = \int_a^b y dx$$

$$L = \int_a^b x dy$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

**LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA**

Perhatikan kurva  $y = f(x)$  dan  $y = g(x)$  dengan  $f(x) > g(x)$  pada selang  $[a, b]$  di bawah ini. Dengan menggunakan cara : *partisi, aproksimasi, jumlahkan, ambil limitnya, integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

Langkah penyelesaian:

1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi :  $L_i \approx [ f(x) - g(x) ] \Delta x$
3. Jumlahkan :  $L \approx \sum [ f(x) - g(x) ] \Delta x$
4. Ambil limitnya :  $L = \lim \sum [ f(x) - g(x) ] \Delta x$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_a^b [ f(x) - g(x) ] dx$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

**Contoh 3**

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva  $y = x^2$  dan garis  $y = 2 - x$

**Jawab**

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva  $x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$  diperoleh  $x = -2$  dan  $x = 1$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya  $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

$$L = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

$$L = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

$$L = \left( 2(1) - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( 2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$L = \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$L = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$L = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

Untuk kasus tertentu pemartisian secara vertikal menyebabkan ada dua bentuk integral. Akibatnya diperlukan waktu lebih lama untuk menghitungnya.

$$\text{Luas daerah} = \int_0^a 2f(x) dx + \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

Jika daerah tersebut dipartisi secara horisontal, maka akan diperoleh satu bentuk integral yang menyatakan luas daerah tersebut. Sehingga penyelesaiannya menjadi lebih sederhana dari sebelumnya.

$$\text{Luas daerah} = \int_c^d (g(y) - f(y)) dy$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

**Contoh 4**  
Hitunglah luas daerah di kuadran I yang dibatasi kurva  $y^2 = x$ , garis  $x + y = 6$ , dan sumbu x

**Jawab**

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva  
 $y^2 = 6 - y \rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0$   
diperoleh  $y = -3$  dan  $y = 2$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya  
 $L \approx (6 - y - y^2) \Delta y$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$\text{Luas daerah} = \int_0^2 (6 - y - y^2) dy$$

Home Back Next

Menghitung Luas dengan Integral Luas Daerah

Luas daerah =  $\int_0^2 (6 - y - y^2) dy$

Luas daerah =  $\left[ 6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$

Luas daerah =  $\left( 6(2) - \frac{4}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - 0$

Luas daerah =  $\left( 12 - 2 - \frac{8}{3} \right)$

Luas daerah =  $\frac{22}{3}$

Home Back Next

Latihan

Soal 1.

Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai ....

A  $\int_0^2 x^2 dx$        D  $\int_0^2 (4 - x^2) dx$   
 B  $\int_0^4 y dy$        E  $\int_0^4 (4 - x^2) dx$   
 C  $\int_0^4 x^2 dx$

Home Back Next

Latihan Penggunaan Integral

Soal 2.

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $x = y^2$  dan garis  $x + y = 2$  adalah ....

A 2,5 satuan luas       D 10 2/3 satuan luas  
 B 4,5 satuan luas       E 20 5/6 satuan luas  
 C 6 satuan luas

Home Back Next

Latihan :

- Carilah luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = x^2 + 1$  dan  $y = x$  dari  $x = 0$  dan  $x = 1$
- Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola  $y = x^2$  dan  $y = 2x - x^2$
- Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva  $y = \sin x$  ,  $y = \cos x$  ,  $x = 0$  dan  $x = \frac{\pi}{2}$
- Carilah luas daerah yang dibatasi oleh garis  $y = x - 1$  dan parabola  $y^2 = 2x + 6$

