**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 01 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui bentuk umum system persamaan linear.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam mengerti dan memahami cara penyelesaian dari bentuk umum system persamaan linear dan apabila diberi suatu persamaan SPL, mahasiswa mampu menyelesaikan dengan metode eliminasi-subtitusi, metode Gauss-Jordan dengan tepat.

# Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear

**Pendahuluan**

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan dan kuantitas. Untuk mempelajari hal-hal ini dalam aljabar digunakan simbol (biasanya berupa huruf) untuk merepresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dan alat bantu memecahkan masalah. Contohnya, x mewakili bilangan yang diketahui dan y bilangan yang ingin diketahui.

**Muhammad Ibn Musa Al-Khawarizmi**, Ia adalah yang pertama kali yang mencetus Al-Jabar dalam bukunya dengan judul "Al-kitab al-jabr wa-l-Muqabala" kitab ini merupakan karya yang sangat monumental pada abad ke-9 M. ia merupakan seorang ahli matematika dari Persia yang dilahirkan pada tahun 194 H/780 M, tepatnya di Khawarizm, Uzbeikistan.

## A. Bentuk umum

Suatu persamaan linear yang mengandung n peubah *x1, x2 ,…,xn* dinyatakan dalam bentuk *a1x1* + *a2x2* + … + *anxn* = *b* dengan *a1, a2, …, an* , *b* adalah konstanta riil. Dalam hal ini, peubah yang dimaksud bukan merupakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma ataupun fungsi exponensial.

**Contoh 1**:

a. $x + y = 4$ → persamaan linear dengan 2 peubah

b. $2x – 3y = 2z +1$→ persamaan linear dengan 3 peubah

c. $2 \log x + \log y = 2$→ bukan persamaan linear

d. $2e^x = 2x + 3$→bukan persamaan linear

## B. Sistem persamaan linear ( SPL )

**Definisi**

Sistem persamaan linear adalah himpunan berhingga dari persamaan linear

**Contoh 2:**

a. $x + y = 2$ → $2x + 2y = 6$

b. $x – y + z = 4$→$x + y = 0$

Tidak semua sistem persamaaan linear memiliki penyelesaian( solusi ) , system persamaan linear yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Secara lebih jelas dapat dilihat pada diagram berikut :

SPL= Sistem Persamaan Linear

1. Tidak Memiliki Penyelesaian ( tidak konsisten)
2. Memiliki Penyelesaian ( Konsisten)
   a. Solusi Tunggal
   b. Solusi banyak

Sebuah pemecahan (solution) persamaan linier $a_1x_1 + a_1x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ adalah sebuah urutan dari n bilangan $s_1$, $s_{2,\ldots,}$ sn sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikan x1 = $s_1$, $x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, Sehingga himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan himpunan pemecahannya (its solution). Sebuah sistem yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan tak konsistent (inconsistent). Jika ada stidak-tidaknya satu pemecahan, maka sistem persamaan tersebut konsistent (consistent). Sebuah sistem sembarang yang terdiri dari m persamaan linier dengan n bilangan yang tidak diketahui akan dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Jika ditulis ke dalam bentuk matrix adalah sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} & b_2 \\ | & | & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Untuk penyelesaian n persamaan dari n variable ($A \cdot \bar{X} = B$) dapat diselesaikan dengan empat cara, yaitu:

a. Dengan eliminasi
b. Dengan Cara OBE: $A|B \rightarrow^{OBE} (I|\bar{X})$
c. $\bar{X} = A^{-1} \cdot B$
d. Aturan Cramer : $X_j = \frac{|A_j|}{}$

a. Dengan eliminasi

Metode ini digunakan dengan cara mengeliminasi (menghilangkan) salah satu variabelnya, sehingga diperoleh sebuah persamaan dengan satu variabel.

Contoh soal:

Tentukan Himpunan Penyelesaian (HP) dari persamaan linear berikut dengan metode eliminasi!

$2x + 3y = 1$ … pers.(1)
$3x + \ \ y = 5$ … pers.(2)

Catatan :

"Jika kita mengeliminasi (menghilangkan) variabel x maka yang akan kita dapatkan nantinya adalah nilai dari variabel y dan sebaliknya, jika kita mengeliminasi variabel y maka yang akan kita dapatkan nantinya adalah nilai dari variabel x ".

Contoh soal

Mengeliminasi x

$2x + 3y = 1 \quad |x3| \quad 6x + 9y = 3$

$3x + \ \ y = 5 \quad |x2| \quad \underline{6x + 2y = 10} \ -$

$7y = -7$

$y = -1$

Mengeliminasi y

$2x + 3y = 1$ |x 1| $2x + 3y = 1$

$3x + y = 5$ |x 3| $\underline{9x + 3y = 15}$ –

$-7x = -14$

$x = 2$

Jadi, HP = {(2, -1)}

**b. Operasi Baris Elementer (OBE)**

Untuk menentukan solusi dari SPL dilakukan dengan cara membentuk matrik yang diperluas/diperbesar dari SPL dan melakukan Operasi Baris Elementer (OBE) pada matriks yang diperbesar tersebut. OBE ini didapatkan dalam suatu tahapan dengan menerapkan ketiga tipe operasi berikut untuk menghilangkan bilangan-bilangan tak diketahui secara sistematik.

1. Kalikan persamaan dengan konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarkan dua persamaan tersebut.
3. Tambahkan kelipatan dari satu persamaan bagi yang lainnya.

Karena baris (garis horisontal) dalam matriks yang diperbesar beresuaian dengan persamaan dalam sistem yang diasosiasikan dengan baris tersebut, maka ketiga operasi ini bersesuaian dengan operasi berikut pada baris matriks yang diperbesar.

1. Kalikanlah sebuah baris dengan sebuah konstanta yang taksama dengan nol.
2. Pertukarkanlah dua baris tersebut.
3. Tambahkanlah perkalian dari satu baris pada baris yang lainnya.

Sifat-sifat matriks yang berbentuk **eselon baris (row-echelon form)** dan **eselon baris tereduksi (reduced row-echelon form)** :

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan taknol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (kita namakan ini **1 utama**).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan berama-sama dibawah matriks.

3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh kekanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. *Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.*

Dikatakan matriks berada dalam bentuk ***eselon baris*** jika memiliki sifat 1, 2, dan 3. Prosedur untuk mereduksi menjadi eselon baris tereduksi disebut ***Eliminasi Gauss-Jordan***. Jika memiliki keempat sifat tersebut, maka matriks tersebut berada dalam bentuk ***eselon baris tereduksi*** dan prosedurnya disebut ***Eliminasi Gauss***.

### 1. Eliminasi Gauss

*Eliminasi Gauss* adalah suatu cara mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks sehingga menjadi matriks yang lebih sederhana.

**Ciri-ciri Eliminasi Gauss**

a. Jika suatu baris tidak semua nol, maka bilangan pertama yang tidak nol adalah 1 (1 utama)

b. Baris nol terletak paling bawah

c. 1 utama baris berikutnya berada dikanan 1 utama baris diatasnya

d. Dibawah 1 utama harus nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2. Eliminasi Gaus-Jordan

Pada metode eliminasi Gauss-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (Semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Contoh 1 :**

Carilah solusi dari persamaan dibawah ini dengan menggunakan OBE.

x + y + 2z = 9

2x + 4y – 3z = 1

3x + 6y – 5z = 0

**Penyelesaian :**

Ubah persamaan tersebut kedalam bentuk matriks yang diperbesar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

kemudian gunakan OBE :

Eliminasi Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

1. baris kedua : $B_2 + (-2)B_1$,

   baris ketiga : $B_3 + (-3)B_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

2. baris kedua : $B_2 \times (1/2)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right]$$

3. baris ketiga : $B_3 + (-3)B_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

4. baris ketiga : $B_3 \times 2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Eliminasi Gauss-Jordan

1. baris kedua : $B_2 + (-7/2)B_3$,

   baris pertama : $B_1 + (-2B_3)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

2. baris pertama : $B_1 - B_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Dari matriks eselon baris tereduksi diatas diperoleh x = 1, y = 2 dan z = 3.

c. $A \cdot \bar{X} = B$,

Dimana:

A = Matriks koefisien ( harus matriks bujur sangkar)

X = Matriks Variabel (berbentuk matriks Kolom)

B =Matriks suku tetap (berbentuk matriks kolom)

d. Aturan Cramer

**Teorema :**

*Jika AX = B adalah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui sehingga det(A) 0, maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang uniq. Pemecahan ini adalah*

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

*dimana $A_j$ adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri dalam matriks.*

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_3 \end{bmatrix}$$

C. Homogen

Bila diberikan suatu SPL maka akan ada dua kemungkiananan terhadap kebenaran solusinya, yaitu SPL tidak mempunyai solusi disebut **SPL Tak Konsisten** dan SPL mempunyai solusi disebut **SPL Konsisten**.

Sebuah sistem persamaan-persamaan linear dikatakan **homogen** jika memuat konstan sama dengan nol.

Tiap-tiap sistem persamaan linier homogen adalah system yang konsisten karena $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ selalu mempunyai solusi.

1. Solusi tersebut dinamakan **solusi trivial** (**solusi tunggal**)
2. Jika ada solusi lain, maka solusi tersebut dinamakan **solusi taktrivial** (**solusi tak hingga**).

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m3}x_n = 0 \end{array}$$

**SPL homogen $A_{mn}$ X=0 ( m: Persamaan, n=Variabel)**

a) **m > n** hanya mempunyai **solusi trivial**

b) **m = n** jika $|A| \neq 0 \rightarrow$ trivial

$|A| = 0 \rightarrow$ tidak trivial

c) **m < n** mempunyai **solusi tidak trivial**

Contoh :

Carilah penyelesaian SPL homogen berikut :

$$\left.\begin{array}{r} 3a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{array}\right\} m = n \qquad |A| \neq 0$$

Jawab :

$3a + b = 0$
$a - b = 0$

$4a \quad = 0 \longrightarrow a = 0$

$3a + b = 0$

$3(0) + b = 0 \longrightarrow b = 0$

Contoh :

(Solusi tak trivial)

Carilah penyelesaian SPL homogen berikut ini :

$$\left.\begin{aligned} 3a + b + c &= 0 \\ 5a - b + c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad m < n$$

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_1(1/3)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{21}(-5)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{b_2(-3/8)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{12}(-1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh : a = - ¼ c dan b = - ¼ c (solusi umum)

Misalkan : c = 4 $\longrightarrow$ a = - 1 dan b = - 1

c = -4 $\longrightarrow$ a = 1 dan b = 1

c = 1 $\longrightarrow$ a = - ¼ dan b = - ¼

c = -1 $\longrightarrow$ a = ¼ dan b = ¼

Jadi, Diperoleh solusi tak

# Daftar Pustaka


1. Anton, H., 1992, *Aljabar Linier Elemneter,* Erlangga, Jakarta.
2. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
3. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
4. https://matematikacooy.wordpress.com/sejarah-aljabar/ diakses pada tanggal 01/03/2016
5. https://aimprof08.wordpress.com/2012/04/14/operasi-baris-elementer/ diakses pada tanggal 01/03/2016
6. http://trainingtounderstand.blogspot.co.id/p/metode-eliminasi-metode-ini-digunakan.html diakses pada tanggal 01/03/2016

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Matriks

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 02 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan matriks.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu memahami pengertian matriks, jenis-jenis matriks dan operasinya.

# Matriks

## A. Definisi Matriks

Beberapa pengertian tentang matriks :

1. Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun atau dijajarkan secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom.
2. Matriks adalah jajaran elemen (berupa bilangan) berbentuk empat persegi panjang.
3. Matriks adalah suatu himpunan kuantitas-kuantitas (yang disebut elemen), disusun dalam bentuk persegi panjang yang memuat baris-baris dan kolom-kolom.

Notasi yang digunakan

$$\left(\quad\right) \qquad \left[\quad\right] \qquad \left\|\quad\right\|$$

**NOTASI MATRIKS**

Matriks kita beri nama dengan huruf besar seperti A, B, C, dll. Matriks yang mempunyai i baris dan j kolom ditulis A=($a_{ij}$ ), artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya $a_{ij}$ dimana indeks I menyatakan baris ke I dan indeks j menyatakan kolom ke j dari elemen tersebut.

Secara umum :

Matriks A=($a_{ij}$ ), i=1, 2, 3,…..m dan j=1, 2, 3,……., n yang berarti bahwa banyaknya baris m dan banyaknya kolom n.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

| Ukuran matriks | 2 x 2 | 2 x 1 | 1 x 4 |
|---|---|---|---|
| Jumlah baris | 2 | 2 | 1 |
| Jumlah kolom | 2 | 1 | 4 |

Matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut MATRIKS BARIS, sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut MATRIKS KOLOM. Dua buah matriks A dan B dikatakan SAMA jika ukurannya sama (mxn) dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j

Contoh

Matriks $A_{3X4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Notasi matriks, Menggunakan huruf besar (kapital).

**B. Jenis-Jenis Matriks**

Berikut ini diberikan beberapa jenis matriks selain matriks kolom dan matriks baris

a) MATRIKS NOL, adalah matriks yang semua elemennya nol

Sifat-sifat :

1. A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0
2. A*0=0, begitu juga 0*A=0.

b) MATRIKS BUJURSANGKAR, adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Barisan elemen $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, ….$a_{nn}$ disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A tersebut.

Contoh : Matriks berukuran 2x2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) MATRIKS BUJURSANGKAR ISTIMEWA

a. Bila A dan B merupakan matriks-matriks bujursangkar sedemikian sehingga AB=BA maka A dan B disebut COMMUTE (saing).
b. Bila A dan B sedemikian sehingga AB=-BA maka A dan B disebut ANTI COMMUTE.
c. Mtriks M dimana $M^{k+1}=M$ untuk k bilangan bulat positif disebut matriks PERIODIK.
d. Jika k bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $M^{k+1}=M$ maka M disebut PERIODIK dengan PERIODE k.
e. Jika k=1 sehingga $M^2=M$ maka M disebut IDEMPOTEN.
f. Matriks A dimana $A^p=0$ untuk p bilangan bulat positif disebut dengan matriks NILPOTEN.
g. Jika p bilangan positif bulat terkecil sedemikian hingga $A^p=0$ maka A disebut NILPOTEN dari indeks p.

d) MATRIKS DIAGONAL, adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e) MATRIKS SATUAN/IDENTITY, adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya adalah 1.

Contoh :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks identitas :

1. A*I=A
2. I*A=A

f) MATRIKS SKALAR, adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu.

Contoh :

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

g) MATRIKS SEGITIGA ATAS (UPPER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal elemennya = 0.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

h) MATRIKS SEGITIGA BAWAH (LOWER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal elemennya = 0.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

i) MATRIKS SIMETRIS, adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan } A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

j) MATRIKS ANTISIMETRIS, adalah matriks yang trnsposenya adalah negatif dari matriks tersebut. Maka $A^T$=-A dan $a_{ij}$=-$a_{ij}$, elemen diagonal utamanya = 0

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{maka } A^T=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k) MATRIKS TRIDIAGONAL, adalah matriks bujursangkar yang semua elemen-elemennya = 0 kecuali elemen-elemen pada diagonal utama serta samping kanan dan kirinya.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

l) MATRIKS JODOH $\bar{A}$, adalah jika A matriks dengan elemen-elemen bilangan kompleks maka matriks jodoh $\bar{A}$ dari A didapat dengan mengambil kompleks jodoh (CONJUGATE) dari semua elemen-elemnya.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 2+3i & 2i \\ 5 & 3-i \end{pmatrix} \quad \text{maka } \bar{A}=\begin{pmatrix} 2-3i & -2i \\ 5 & 3+i \end{pmatrix}$$

m) MATRIKS HERMITIAN. Matriks bujursangkar $A=(a_{ij})$ dengan elemen-elemen bilangan kompleks dinamakan MATRIKS HERMITIAN jika $(\bar{A})'=A$ atau matriks bujursangkar A disebut hermitian jika $a_{ij} = \bar{a}_{ij}$ . dengan demikian jelas bahwa elemen-elemen diagonal dari matriks hermitian adalah bilangan-bilangan riil.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5+i \\ 5-i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{maka} \begin{pmatrix} 2 & 5-i \\ 5+i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan } \bar{A}'=\begin{pmatrix} 2 & 5+i \\ 5-i & 3 \end{pmatrix}$$

## C. Operasi Matriks

a) Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama. Jika $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ adalah matriks-matriks berukuran sama, maka A+B adalah suatu matriks $C=(c_{ij})$ dimana $(c_{ij}) = (a_{ij}) +(b_{ij})$ atau [A]+[B] = [C] mempunyai ukuran yang sama dan elemennya $(c_{ij}) = (a_{ij}) +(b_{ij})$

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A+C tidak terdefinisi (tidak dapat dicari hasilnya) karena matriks A dan B mempunyai ukuran yang tidak sama.

b) Pengurangan Matriks

Sama seperti pada penjumlahan matriks, pengurangan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jika ukurannya berlainan maka matriks hasil tidak terdefinisikan.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{maka}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & 4-2 \\ 4-3 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**c) Perkalian Matriks Dengan Skalar**

Jika k adalah suatu bilangan skalar dan $A=(a_{ij})$ maka matriks $kA=(ka_{ij})$ yaitu suatu matriks kA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks. Misalnya [C]=k[A]=[A]k dan $(c_{ij}) = (ka_{ij})$

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka } 2A=\begin{pmatrix} 2*1 & 2*2 & 2*3 \\ 2*0 & 2*-1 & 2*5 \end{pmatrix}$$

Pada perkalian skalar berlaku hukum distributif dimana k(A+B)=kA+kB.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dengan } k=2\text{, maka}$$

K(A+B) = 2(A+B) = 2A+2B

$$2(A+B) = 2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)= 2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A+2B = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

## d) PERKALIAN MATRIKS DENGAN MATRIKS

Beberapa hal yang perlu diperhatikan :

1. Perkalian matriks dengan matriks umumnya tidak komutatif.
2. Syarat perkalian adalah jumlah banyaknya kolom pertama matriks sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.
3. Jika matriks A berukuran mxp dan matriks pxn maka perkalian A*B adalah suatu matriks C=($c_{ij}$ ) berukuran mxn dimana
   $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{ip}b_{pj}$

Contoh : 1) A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3*3) + (2*1) + (1*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

2) A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} (3*3) + (2*1) + (1*0) \\ (1*3) + (2*1) + (1*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beberapa Hukum Perkalian Matriks :

1. Hukum Distributif, A*(B+C) = AB + AC
2. Hukum Assosiatif, A*(B*C) = (A*B)*C
3. Tidak Komutatif, A*B ≠ B*A
4. Jika A*B = 0, maka beberapa kemungkinan
   (i) A=0 dan B=0
   (ii) A=0 atau B=0
   (iii) A≠0 dan B≠0
5. Bila A*B = A*C, belum tentu B = C

## D. Matriks Transpose

Jika diketahui suatu matriks A=$a_{ij}$ berukuran mxn maka transpose dari A adalah matriks $A^T$ =nxm yang didapat dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A sebagai kolom ke-i dari $A^T$.

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

1. $(A^T) = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $k(A^T) = (kA)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Buktikan sifat-sifat transpose diatas !

**Contoh**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B^t \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Latihan Soal.**

**1.** Diketahui $\begin{bmatrix} x & -2 \\ -4 & y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ Tentukan x?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{bmatrix}$$

**2.** $B = \begin{bmatrix} a-1 & -c \\ 0 & d \end{bmatrix}$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika $A+B^t=C^2$ maka tentukan d?

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html diakses pada tanggal 07 maret 2016

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Determinan dan Invers

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 03 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui determinan dan Invers matriks.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami perhitungan determinan dalam mencari invers matriks.

# Determinan dan Invers Matriks

**Pendahuluan**

Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi skalar dengan domain matriks bujur sangkar. Dengan kata lain, determinan merupakan pemetaan dengan domain berupa matriks bujur sangkar, sementara kodomain berupa suatu nilai skalar. Determinan suatu matriks sering digunakan dalam menganalisa suatu matriks, seperti : untuk memeriksa keberadaan invers matriks, menentukan solusi sistem persamaan linear dengan aturan cramer, pemeriksaan basis suatu ruang vektor dan lain-lain.

Determinan adalah satu pokok bahasan yang termasuk dalam Aljabar Linear. Determinan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan Aljabar Linear, antara lain mencari invers matriks, menentukan persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen, dan untuk menyelesaikan persamaan linear.

**A. Determinan**

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dinyatakan Det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

Sifat–sifat determinan matriks bujursangkar

1. Jika A adalah sebarang matriks kuadrat yang mengandung sebaris bilangan nol, maka det(A) = 0.
2. Jika A adalah matriks segitiga n x n, maka det(A) adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama, yakni det(A) = $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$
3. Misalkan A' adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal A dikalikan oleh konstanta k, maka det(A') = k det(A)
4. Misalkan A' adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan satu baris A ditambahkan pada baris lain, maka det(A') = det(A)
5. Jika A adalah sebarang matriks kuadrat, maka det(A) = det($A^t$)
6. Misalkan A, A' dan A" adalah matriks n x n yang hanya berbeda dalam baris tunggal, katakanlah baris ke-r, dan anggap bahwa baris ke r dari A" dapat diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian dalam baris ke-r dari A dan dalam baris ke-r dari A', maka det(A") = det(A) + det(A') [hasil yang serupa juga berlaku untuk kolom]
7. Jika A dan B adalah matriks kuadrat yang ukurannya sama, maka det(AB) = det(A) det(B)

8. Sebuah matriks kuadrat dapat dibalik jika dan hanya jika det(A) 0

   Jika A dapat dibalik, maka det($A^{-1}$) =) det ($A^{-1}$) = $\dfrac{1}{\det(A)}$

Untuk setiap matriks bujur sangkar *A* terdapat nilai karakteristik yang dikenal sebagai determinan, biasa ditulis det (*A*) atau $|a_{jk}|$. Determinan matriks *A* ditulis sebagai

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jk} \end{vmatrix}.$$

Jika matriks *A* dengan det (*A*) = 0, *A* disebut matriks singular. Sebaliknya, jika det (*A*) $\neq 0$, *A* disebut matriks taksingular.

**Minor dan Kofaktor**

Jika baris ke-*j* dan kolom ke-*k* pada determinan yang disajikan di atas dihilangkan, kemudian dibentuk sebuah determinan dari unsur-unsurnya yang tertinggal, akan diperoleh determinan baru yang terdiri atas (*n*-1) baris dan (*n*-1) kolom. Determinan baru ini merupakan minor dari unsur $a_{jk}$ dan dinyatakan dengan ungkapan $M_{jk}$. Sebagai contoh,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

maka minor unsur $a_{32}$ adalah $M_{32}$, yaitu

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Jika minor dari $a_{jk}$ dikalikan dengan $(-1)^{j+k}$ hasilnya dinamakan kofaktor dari $a_{jk}$ dan dinyatakan dengan $A_{jk}$. Jadi,

$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$.

Untuk menentukan determinan matriks *A* dapat digunakan ekspansi Laplace yang menyatakan bahwa nilai determinan merupakan jumlah dari hasil kali unsur-unsur pada suatu baris (atau suatu kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. Secara matematis,

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$, untuk sembarang *j*.

Sebagai contoh, kita akan menghitung

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Untuk *j* =1, diperoleh

$\det A = \sum_{k=1}^{2} a_{1k A_{1k}} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$,

dengan $A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}$ dan $A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}$. Jadi,

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

a. Determinan matriks ordo 2 x 2

Matriks berordo 2 × 2 yang terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 × 2. Misalkan *A* adalah matriks persegi ordo 2 × 2 dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Determinan matriks *A* di definisikan sebagai selisih antara perkalian elemenelemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks *A* dinotasikan dengan det *A* atau |*A*|. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

Berdasarkan definisi determinan suatu matriks, Anda bisa mencari nilai determinan dari matriks *A*, yaitu:

$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \times d - b \times c = ad - bc$

**Contoh :**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka det A = |*A*| = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ = 1.4 – 2.3 = 4 – 6 = -2

b. Determinan matriks ordo 3 x 3

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari determinan mariks berordo 3 × 3.

Misalkan *A* matriks persegi berordo 3 × 3 dengan bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 × 3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan *metode Sarrus*.

Adapun langkah-langkah yang harus di lakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 × 3 dengan *metode Sarrus* adalah sebagai berikut:

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks *A* di sebelah kanan tanda determinan.

2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama
dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan *Du*

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$Du = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihar gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan *Ds*.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$Ds = a_{31}\ a_{22}\ a_{13} + a_{32}\ a_{23}\ a_{11} + a_{33}\ a_{21}\ a_{12}$$

4. Sesuai dengan definisi determinan matriks maka determinan dari matriks *A* adalah selisih antara *Du* dan *Ds* yaitu *Du – Ds*.

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}) - (a_{31}\ a_{22}\ a_{13} + a_{32}\ a_{23}\ a_{11} + a_{33}\ a_{21}\ a_{12})$$

Contoh :

Diketahui matriks *A* = $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Tentukan nilai determinan matriks *A*.

Jawab :

$$\det A = \left[\begin{array}{ccc} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{cc} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

= [(–3 × 1 × (–1)) + (4 × 3 × 1) + (2 × 2 × 0)] – [(1 × 1 × 2) +

$(0 \times 3 \times (-3)) + (-1 \times 2 \times 4)]$

$= (3 + 12 + 0) - (2 + 0 - 8) = 21$

Jadi, nilai determinan matriks *A* adalah 21.

c. Menyelesaikan SPLDV dengan Determinan

Determinan Variabel x dan Determinan Variabel y.

1. Determinan Utama (D) adalah determinan yang koefisiennya x dan y. Koefisien x masing-masing terletak pada kolom pertama, sedangkan koefisien y terletak masing-masing di kolom kedua.
2. Determinan Variabel x ($D_{x}$) adalah determinan yang diperoleh dengan cara mengganti koefisien-koefisien variabel x dari determinan utama dengan bilangan-bilangan ruas kanan.
3. Determinan Variabel y ($D_{y}$) adalah determinan yang diperoleh dengan cara mengganti koefisien-koefisien variabel y dari determinan utama dengan bilangan-bilangan ruas kanan

Contoh

$$4x - y = 13$$
$$2x + 5y = 1$$

Pembahasan:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 2 = 22$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 65 + 1 = 66$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 26 = -22$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{66}{22} = 3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-22}{22} = -1$$

## B. Matriks Invers

Definisi: Bila A.B= B.A=I. Maka A dan B saling invers. Notasi invers A adalah $A^{-1}$

Sifat-sifat Matriks Invers

Jika A dan B non singular, atau invertibel,maka: A.B juga non singular.

$(A.B)^{-1}= B^{-1}.A^{-1}$

$A^n=\{A.A.A\ldots A\} \rightarrow$ n factor

$A^0=I$

$A^{-n}=(A^{-1})n=\{A^{-1},A^{-1},A^{-1}..A^{-1}\} \rightarrow$ n factor

$(A^{-1})^{-1}=A$

$(p.A)^{-1}=p^{-1}.A^{-1}=1/pA^{-1}$

$A^m.A^n=A^{m+n}$

$(A^n)^m=A^{n.m}$

Jika pada matriks bujur sangkar *A* terdapat matriks *B* sehingga *AB* = *I*, dengan *I* adalah matriks identitas, maka *B* dinamakan invers matriks *A* dan ditulis sebagai $A^{-1}$. Jadi, jika *A* adalah matriks bujur sangkar tak singular berorde-*n*, maka terdapat satu invers $A^{-1}$ sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Invers matriks memiliki sifat, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dan $(A^{-1})^{-1} = A$.

Untuk menentukan invers matriks dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: metode reduksi baris dan metode determinan.

**Metode Reduksi Baris**

Untuk memberi gambaran penerapan metode reduksi baris, diandaikan kita akan menghitung invers matriks *A*. Dengan mengingat sifat-sifat matriks satuan *I*, *A* = *IA*. Selanjutnya, dengan mereduksi *A* di ruas kiri menjadi *I* maka ruas kanan akan tereduksi menjadi *B* sehingga menghasilkan *I* = *AB*. Jadi, *B* adalah invers matriks *A*. Metode reduksi baris terdiri atas operasi-operasi berikut:

1. Menukarkan dua baris,

2. Mengalikan sembarang baris dengan sebuah tetapan $k \neq 0$, dan

3. Menjumlahkan atau mengurangkan dua baris sembarang.

Untuk memudahkan penulisan operasi reduksi baris, biasa digunakan notasi $B_{j,k}$ dan $aB_j \pm bB_k$. Notasi pertama menunjukkan baris-*j* dan baris-*k* dipertukarkan, sedangkan notas kedua artinya baris-*j* dikalikan dengan *a* kemudian dijumlahkan atau dikurangkan dengan *b* kali baris-*k*.

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=?$

$A.A^{-1}=I$

Misalkan

$A^{-1}= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & +2c & b+2d \\ 3a & +4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a+2c=1 & b+2d=0 \\ 3a+4c=0 & 3b+4d=1 \end{matrix}$$

$$a+2c=1 |x2| \rightarrow 2a+4c=2$$

$$3a+4c=0 |x1| \rightarrow \frac{3a+4c=0}{-a=2} -$$

$$a=-2$$

$$3a+4c=0$$

$$4c=-3a$$

$$c=\frac{-3a}{4}=\frac{-3(-2)}{4}$$

$$c=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

$$b + 2d = 0 \left| x2 \right| \rightarrow 2d + 4d = 0$$

$$3b + 4d = 1 \left| x1 \right| \rightarrow \underline{\quad 3b + 4d = 1 \quad}$$

$$-b = -1$$

$$b = 1$$

$$b + 2d = 0$$

$$2d = -b$$

$$d = \frac{-b}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

A$^{-1}$= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

Atau

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\dim ana \left| A \right| = 1x4 - 2x3 = -2$$

Rumus Penyelesaian matriks Invers

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$(A|I) \xrightarrow{OBE} (I|A^{-1})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Selain dapat digunakan untuk menentukan invers suatu matriks, determinan juga dapat digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linier dengan *n* bilangan tidak diketahui dan *n* persamaan linier. Rumus untuk memecahkan sistem persamaan linier dengan menggunakan determinan ini dinamakan *aturan Cramer* seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

**C. (Aturan Cramer)**

*Jika AX = B adalah sistem persamaan linier yang terdiri dari n bilangan yang tidak diketahui dan n persamaan linier dan juga det A ≠0, maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik yaitu,*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad . \quad . \quad . \quad , x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

*di mana $A_j$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti komponen-komponen dalam kolom ke-j dari matriks A dengan komponen-komponen dalam matriks B.*

***Bukti :***

Misalkan,

**(Aturan Cramer)**

*Jika AX = B adalah sistem persamaan linier yang terdiri dari n bilangan yang tidak diketahui dan n persamaan linier dan juga det A ≠0, maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik yaitu,*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad . \quad . \quad . \quad , x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

*di mana $A_j$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti komponen-*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

diperoleh bahwa sistem persamaan $AX = B$ mempunyai pemecahan unik yaitu

$$X = A^{-1}B \qquad (*)$$

Sedangkan dari teorema kita peroleh,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \mathrm{adj}\ A \qquad (**)$$

Jika kita masukan harga $A^{-1}$ ini ke dalam persamaan $(*)$ dan jika

$$\mathrm{adj}\ A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & . & . & . & C_{n1} \\ C_{1n} & C_{2n} & . & . & . & C_{n2} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ C_{1n} & C_{2n} & . & . & . & C_{nn} \end{bmatrix}$$

maka

$$X = A^{-1}B = \left[\frac{1}{\det A}\ \mathrm{adj}\ A\right]B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & . & . & . & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & . & . & . & C_{n2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ C_{1n} & C_{2n} & . & . & . & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + . \quad . \quad . + C_{n1}b_n \\ C_{12}b_1 + C_{22}b_2 + . \quad . \quad . + C_{n2}b_n \\ . \\ . \\ . \\ C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + . \quad . \quad . + C_{nn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + . \quad . \quad . + C_{n1}b_n}{\det A} \\ \dfrac{C_{12}b_1 + C_{22}b_2 + . \quad . \quad . + C_{n2}b_n}{\det A} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + . \quad . \quad . + C_{nn}b_n}{\det A} \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1C_{11} + b_2C_{21} + \; . \quad . \quad . \; + b_nC_{n1}}{\det A} \\ \dfrac{b_1C_{12} + b_2C_{22} + \; . \quad . \quad . \; + b_nC_{n2}}{\det A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \; . \quad . \quad . \; + b_nC_{nn}}{\det A} \end{bmatrix} \qquad (***)$$

Misalkan $A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ b_n & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka $\det A_1 = b_1C_{11} + b_2C_{21} + \; . \quad . \quad . \; + b_nC_{n1}$

(*ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama*)

$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & . & . & . & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & . & . & . & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & b_n & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka $\det A_2 = b_1C_{21} + b_2C_{22} + \; . \quad . \quad . \; + b_nC_{2n}$

(*ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua*)

dan seterusnya sampai,

$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & b_2 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & b_n \end{bmatrix}$, maka $\det A_n = b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \; . \quad . \quad . \; + b_nC_{nn}$

(*ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-n*)

Selanjutnya masukan det$A_1$, det $A_2$, . . . , det $A_n$ ke dalam persamaan (∗∗∗), akan diperoleh,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\det A_n}{\det A} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Pecahkanlah sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

***Jawab :***

Sistem persamaan linier di atas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks $AX = B$ di mana,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ganti komponen-komponen kolom pertama matriks $A$ dengan komponen-komponen matriks $B$. Selanjutnya ganti komponen-komponen kolom kedua dengan komponen-komponen matriks $B$ dan seterusnya sampai kolom keempat. Matriks-matriks baru yang diperoleh dengan penggantian komponen-komponen kolom $A$ ini adalah,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, hitunglah determinan-determinan matriks $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, dan $A_4$ maka akan diperoleh, (hitung sendiri determinan-determinan ini dengan memakai cara apa saja yang saudara anggap paling mudah)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -192$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -384 \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -192$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Berdasarkan aturan Cramer, maka pemecahan sistem persamaan linier di atas adalah,

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-384}{-192} = 2\,, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-192}{-192} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{0}{-192} = 0\,, \qquad x_4 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{0}{-192} = 0$$

## Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. http://www.informasibelajar.com/2015/08/determinan-matriks-pembahasan-contoh-soal.html diakses pada tanggal 7 Maret 2016

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Vektor

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 04 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui vektor.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami pengertian vektor, panjang vektor, vektor melalui dua titik dan operasi penjumlahannya.

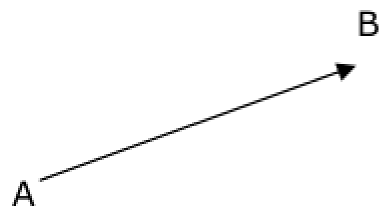
# Vektor

**Pendahuluan**

Dalam bidang sains kita telah mengenal istilah besaran yang tidak mempunyai arah dan besaran yang mempunyai arah. Umumnya, besaran yang tidak mempunyai arah dikenal dengan istilah besaran skalar. Sedangkan besaran yang mempunyai arah disebut besaran vektor atau vektor.

A. **Definisi Vektor**

Vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah. Vektor dinotasikan sebagai ruas garis berarah. contoh: kecepatan, percepatan, gaya, momen gaya, dsb. Suatu partikel bergerak dari titik A ke titik B, maka dapat dikatakan bahwa partikel itu mengalami perpindahan.




Secara geometri, vector adalah ruas garis berarah. Karena vector merupak ruas garis maka vector memiliki ukuran panjang dank arena vector memiliki arah maka vector memiliki sudut terhadap sumbu x positif. Sebuah vector bisa dinyatakan dalam bentuk geometri yang digambarkan sebagai sebuah ruas garis dengan arah tertentu diamana salah satunya merupakan pangkal dan satunya lagi merupakan ujungnya. Vektor juga dapat dinyatakan dalam bentuk aljabar.

**Komponen Vektor**

Vektor dibentuk dari dua buah titik dimana satu tutuk sebagai pangkal dan satu titik lainya sebagai ujung. Vector yang berpangkal di titik A($a_1$,$a_2$) dan berujung di titik B($b_1$,$b_2$) memiliki koponen sebagai berikut:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Jika suatu vector berpangkal di titik pusat O(0,0) dan berujung di titik A**($a_1$,$a_2$) maka** vector tersebut cukup dituliskan dalam satu huruf sesuai huruf titiknya dan ditulis huruf kecilnya. Vektor yang berpangkal di titik pusat O dan berujung di suatu titik disebut vector posisi. Vektor OA dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

**Notasi Vektor**

Sebuah vector dapat dituliskan dalam beberapa bentuk notasi. Berikut ini adalah penulisan notasi vector.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

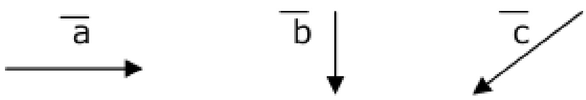
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

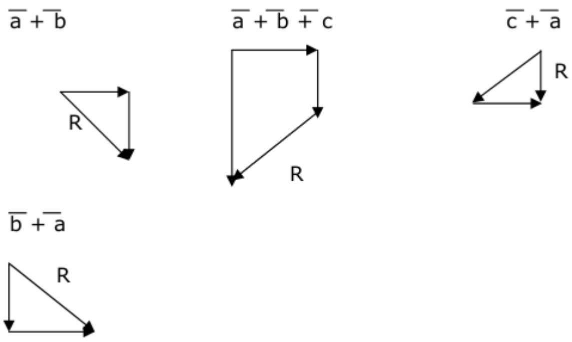
Ketiga memiliki arti yang sama, yaitu vector komponen $v_1$ dan $v_2$.

## B. Operasi Vektor

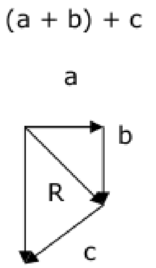
### 1. Penjumlahan vector secara geometris

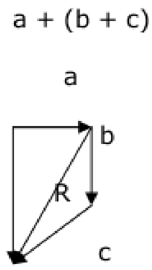



Dari ketiga vector tersebut dapat dijumlahkan dengan cara sebagai berikut:



Pada penjumlahan vector berlaku hukum **a + b = b + a**

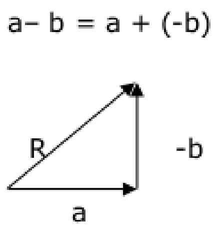


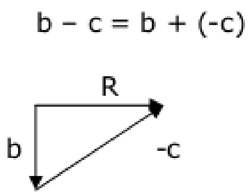




Pada vector berlaku sifat **ASOSIATIF (a + b) + c = a + (b + c)**

### 2. Pengurangan Vektor secara geomatris

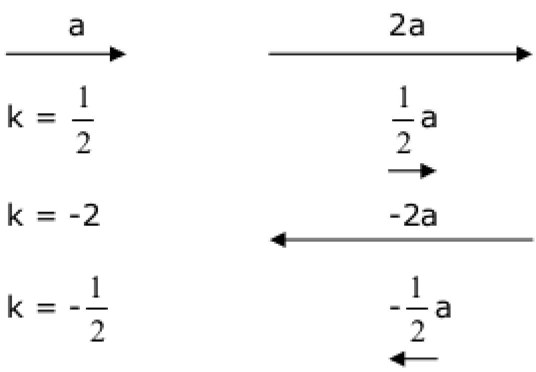
Pengurangan vector dapat dilakuakan dengan menjumlahkan vector 1 dengan lawan vector 2.




## C. Perkalian Vektor

### 1. Perkalian sebuah konstanta dengan sebuah vektor



- “Jika k positif maka arahnya sama dengan arah vector a”
- “Jika k negatif maka arahnya berlawanan dengan vector a”

**2. Perkalian dua buah vector dengan hasil berupa skal**ar

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |a||b| \cos\theta}$$

Operasi di atas disebut juga “dot product”

Keterangan:

a = vector a

b = vector b

θ = sudut yang dibentuk antara vector a dan vector b

**3. Perkalian dua buah vector dengan hasil berupa vector lain**

$$\boxed{\vec{a}x\vec{b} = |a||b| \sin\theta}$$

Keterangan:

a = vector a

b = vector b

θ = sudut yang dibentuk antara vector a dan vector b

## Sifat - Sifat Operasi Hitung dalam Vektor

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} + 0 = 0 + \vec{a} = \vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

$k(l\vec{a}) = (kl)\,\vec{a}$

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$

$(k \pm l)\vec{a} = k\vec{a} \pm l\vec{a}$

**Contoh :**

1. Diketahui vektor $\vec{a}$ = (-1, 2, 3), $\vec{b}$ = (-2, 0, 1) dan $\vec{c}$ = (3, -1, -2). Hitunglah :

   a. $2\vec{a} + \vec{b}$

   b. $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$

**Jawab :**

a. $2\vec{a} + \vec{b} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Jadi $2\vec{a} + \vec{b}$ = (-4, 4, 5)

b. $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = (13, 2, 3)$

2. Buktikan bahwa vektor $\vec{a}$= (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor $\vec{b}$= (1, 0, -2).

**Jawab :**

Agar dapat membuktikan bahwa vektor $\vec{a}$= (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor $\vec{b}$= (1, 0, -2), maka harus mencari *k*(bilangan real) sehingga $\vec{a}$= **k**$\vec{b}$

$\vec{a} = \mathbf{k}\vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{a} - \mathbf{k}\vec{b} = 0$

(-3, 0, 6) - k(1, 0, -2) = (0, 0, 0)

(-3, 0, 6) - (k, 0, 2k) = (0, 0, 0)

(-3 - k, 0, 6 + 2k) = (0, 0, 0)

Diperoleh k = 3 sehingga vektor $\vec{a}$= **3**$\vec{b}$

Jadi, vektor $\vec{a}$= (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor $\vec{b}$= (1, 0, -2)

**D. Vektor Khusus**

1. Vektor Nol (0) adalah suatu vector dimana titik awal dan titik ujungnya berimpit. Elemen-elemen vector semuanya nol. $\underline{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Vektor Satuan adalah vector yang panjangnya saja satuan vector. Vektor satuan dari vector $\underline{a}$ adalah: $\underline{e} = \dfrac{a}{|a|}$

3. Vektor posisi adalah vector yang titik pangkalnya adalah O. Pentingnya untuk diingat, bahwa setiap vector dapat diganti dengan vector posisi, dengan menggunakan prinsip kesamaan dua vector. Jika A(a1,a20 suatu titik, maka titik tersebut juga bisa dituliskan sebagai vector posisi, sebagai $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

   Jika A=($a_1$,$a_2$,$a_3$) dan B=($b_1$,$b_2$,$b_3$) adalah: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix}$

4. Panjang Vektor

   Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka panjang dari vector adalah;

   $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

   Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ maka panjang dari vector a adalah:

   $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

   Jika a dan b dua buah vektor maka:

   $$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = 2|\underline{a}|^2 + 2|\underline{b}|^2 - |\underline{a} - \underline{b}|^2$$

   $$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\alpha}$$

   $$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\alpha}$$

**Latihan Soal dan Pembahasan:**

1. Jika vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Maka vector $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = .........?$

**Jawab**

$$\begin{aligned}
\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 10 - 2 \\ 2 + 8 - (-3) \\ 3 - 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Tunjukkan bahwa bidang $x + y - 2z = 1$ dan bidang $x + 3y - z = 4$ berpotongan membentuk garis dan tentukan persamaan garis tersebut !

**Jawab:**

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Yordan, SPL:

$x + y - 2z = 1$

$x + 3y - z = 4$

Diselesaikan dan menghasilkan penyelesaian:

$x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}z, \quad y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z$ dan $z$ bernilai sembarang.

Dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}t$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$$

$$z = t$$

Persamaan garis tersebut melalui titik A(-1/2, 3/2, 0) dan mempunyai vektor arah $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Diketahui vektor **a** = 2i – 6j – 3k dan **b** = 4i + 2j – 4k . Panjang proyeksi vektor **a** pada **b** adalah…..

   Jawab :

   Panjang masing-masing vektor, jika nanti diperlukan datanya:

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$|b| = \sqrt{4^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

   Proyeksi vektor a pada vektor b, namakan c:

$$|\mathbf{c}| = \frac{a \cdot b}{|\mathbf{b}|}$$

$$|\mathbf{c}| = \frac{(2i - 6j - 3k)(4i + 2j - 4k)}{6}$$

$$|\mathbf{c}| = \frac{8 - 12 + 12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. *file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/PRODI.../BAB_1___**VEKTOR**.pdf*
4. http://klompokku.blogspot.co.id/2013/09/makalah.html diakses pada tanggal 09 maret 2016
5. https://matikzone.files.wordpress.com/2011/02/rumus-cepat-matematika-vektor.pdf diakses pada tanggal 09 maret 2016
6. http://pujiyanto-matematika.blogspot.co.id/2012/11/operasi-operasi-pada-vektor.html diakses pada tanggal 09 maret 2016
7. http://pandaimatematika.com/12ipa/mod/page/view.php?id=42 diakses pada tanggal 09 maret 2016
8. http://wahyunugroho219.blogspot.co.id/2013/06/latihan-soal-matematika-kelas-11.html diakses pada tanggal 09 maret 2016

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Perkalian Titik atau Dot Product

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 05 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui perkalian titik atau dot product.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami operasi perkalian titik dua vector, proyeksi antar dua vector serta jarak titik pada sebuah garis linear.

# Perkalian Titik atau Dot Product

**Pendahuluan**

Dua operasi pada vektor, penjumlahan dan perkalian skalar, akan menghasilkan vektor. Pada pembahasan ini kita akan mempelajari operasi vektor ketiga, yaitu **hasil kali titik**. Hasil kali ini tidak menghasilkan suatu vektor, tetapi akan menghasilkan suatu skalar. Oleh karena itu, hasil kali titik sering disebut juga sebagai *hasil kali skalar* (atau *hasil kali dalam*).

**A. Definisi Dot Product**

Dot (●) Product adalah bentuk perkalian antara 2 vektor yang akan menghasilkan skalar, yang didefinisikan dalam rumus: $\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\theta$

Keterangan: $\theta$ adalah sudut yang dibentuk oleh kedua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$.

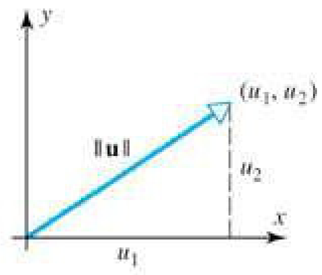
| |
|---|
| Mengapa hasilnya skalar?<br>Masing-masing unsur dari $\|\bar{a}\|$, $\|\bar{b}\|$, dan $\cos\theta$ adalah skalar. Jadi, $\bar{a}\bullet\bar{b}$ juga skalar. (Lihat juga pembahasan tentang cross product. Mungkin akan memperjelas. ^^)<br><br>Mengapa Dot Product didefinisikan seperti itu?<br>Justru itulah masalahnya. Si pembuat definisi itu memang sangat kreatif. Mulanya, untuk mengalikan vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, maka akan ada tiga unsur yang berperan, yaitu panjang $\bar{a}$, panjang $\bar{b}$, dan sudut yang dibentuk keduanya ($\theta$). Definisi untuk dot diambil unsur yang cos. ^^<br><br>Apa arti dari hasil perkalian itu?<br>Kalo ngak *diolah* lebih lanjut, hasil dari $\|\bar{a}\|$. $\|\bar{b}\|$. $\cos\theta$ sesungguhnya tidak memiliki arti. $\|\bar{a}\|$. $\|\bar{b}\|$. $\cos\theta$ hanya kumpulan angka-angka saja dan angka itu tidak menunjukkan besaran apapun (bagi saya). Oleh, karena itu dot product harus diolah lagi agar dapat diaplikasikan. |

**Definisi :**

*Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor di ruang-2 dan ruang-3 dan $\theta$ adalah sudut diantara **u** dan **v**, maka hasil kali titik (dot product) atau hasil kali dalam Euclidis (Euclidean inner product) **u**.**v** didefinisikan oleh*

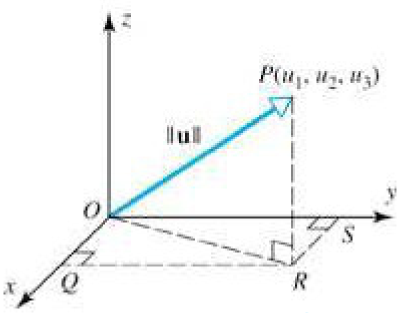
*u.v =*

$\|u\|$ artinya panjang vektor **u** dan didefinisikan sebagai $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ (jika di ruang-2) dan $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (jika di ruang-3). Panjang sebuah vektor juga dikenal dengan nama **norma**. Secara geometris dapat dilukiskan seperti pada gambar dibawah ini.




**Gambar 1** : *vektor pada ruang-2*

Jika kita perhatikan, vektor **u** yang melalui titik asal tersebut membentuk segitiga siku-siku terhadap sumbu-x. Kita bisa memanfaatkan **Rumus Pythagoras** yaitu $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 \Rightarrow \|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$




**Gambar** : *vektor pada ruang-3.*

Dengan memanfaatkan **Rumus Phytagoras** juga, diperoleh

$\|u\|^2$ = $(OR)^2 + (RP)^2$

= $(RS)^2 + (OS)^2 + (RP)^2$

= $(OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2$

= $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

$\|u\|$= $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Penting untuk diketahui juga bahwa sifat – sifat pada perkalian titik vektor dibawah ini :

Misalkan **u**, **v** dan **w** adalah vektor di ruang-2 atau ruang-3 dan k adalah skalar, maka

1. **v**.**v** = $\|v\|^2$yakni $\|v\|$= (**v**.**v**)$^{1/2}$

   **Bukti** :

   Karena vektor **v** berimpit dengan vektor **v** itu sendiri maka $\theta$adalah sudut diantara **v** dan **v** adalah $0^0$, diperoleh

   **v**.**v** = $\|v\|\|v\|$cos $\theta$

   = $\|v\|^2$cos 0

   = $\|v\|^2$

2. Jika **u** dan **v** adalah vektor – vektor taknol dan $\theta$adalah sudut di antara kedua vektor tersebut, maka

   $\theta$lancip jika dan hanya jika **u**.**v** > 0

   $\theta$tumpul jika dan hanya jika **u**.**v** < 0

   $\theta$= $\frac{\pi}{2}$jika dan hanya jika **u**.**v** = 0

   **Bukti :**

Perlu diingat bahwa $\theta$ akan lancip jika dan hanya jika cos $\theta$ > 0, $\theta$ akan tumpul jika dan hanya jika cos $\theta$ < 0 dan $\theta$ akan = $\frac{\pi}{2}$ (siku-siku) jika dan hanya jika cos $\theta$ = 0

Karena $\|u\|$ > 0 dan $\|v\|$ > 0 serta berdasarkan **Definisi Dot Product** bahwa **u**.**v** = $\|u\|\|v\|$cos $\theta$, maka **u**.**v** memiliki tanda sama dengan cos $\theta$.

Karena 0 $\leq \theta \leq \pi$, maka sudut $\theta$ lancip jika dan hanya jika cos $\theta$ > 0, $\theta$ tumpul jika dan hanya jika cos $\theta$ < 0, dan $\theta$ = $\frac{\pi}{2}$ jika dan hanya jika cos $\theta$ = 0

3. **u**.**v** = **v**.**u**

   **Bukti :**

   **u**.**v** = ($u_1$, $u_2$, $u_3$).($v_1$, $v_2$, $v_3$)

   **=** ($u_1$ $v_1$ + $u_2$ $v_2$ + $u_3$ $v_3$)

   **=** ($v_1$ $u_1$ + $v_2$ $u_2$ + $v_3$ $u_3$) [komutatif bil.riil]

   **=** ($v_1$, $v_2$, $v_3$).($u_1$, $u_2$, $u_3$)

   **= v**.**u**

4. **u**.(**v** + **w**) = **u**.**v** + **u**.**w**

   **Bukti :**

   **u**.(**v** + **w**) = ($u_1$, $u_2$, $u_3$).[($v_1$, $v_2$, $v_3$) + ($w_1$, $w_2$, $w_3$)]

   **=** ($u_1$, $u_2$, $u_3$).($v_1$ + $w_1$, $v_2$ + $w_2$, $v_3$ + $w_3$)

   = ($u_1$[$v_1$ + $w_1$] + $u_2$[$v_2$ + $w_2$] + $u_3$[$v_3$ + $w_3$])

   = ([$u_1v_1$ + $u_1w_1$] + [$u_2v_2$+ $u_2w_2$] + [$u_3v_3$ + $u_3w_3$]) [distributif bil.riil]

   = ([$u_1v_1$ + $u_2v_2$ + $u_3v_3$] + [$u_1w_1$ + $u_2w_2$ + $u_3w_3$])

   = ($u_1v_1$ + $u_2v_2$ + $u_3v_3$) + ($u_1w_1$ + $u_2w_2$ + $u_3w_3$)

   = **u**.**v** + **u**.**w**

5. k(**u**.**v**) = (k**u**).**v** = **u**.(k**v**)

**Bukti :**

k(**u**.**v**) = k[($u_1$, $u_2$, $u_3$).($v_1$, $v_2$, $v_3$)]

= k($u_1$ $v_1$ + $u_2$ $v_2$ + $u_3$ $v_3$)

= (k[$u_1$ $v_1$] + k[$u_2$ $v_2$] + k[$u_3$ $v_3$])

= ([k$u_1$]$v_1$ + [k$u_2$]$v_2$ + [k$u_3$]$v_3$) [asosiatif bil.rill]

= (k**u**).**v**

= ($u_1$[k$v_1$] + $u_2$[k$v_2$] + $u_3$[k$v_3$]) [komutatif bil.riil]

= **u**.(k**v**)

6. **v**.**v** > 0 jika **v** $\neq$0 dan **v**.**v** = 0 jika **v** = 0

**Bukti** :

Karena **v** $\neq$0 berakibat $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} > 0$, sehingga **v**.**v** = $\|v\|^2 > 0$

Karena **v** = 0 berakibat $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$, sehingga **v**.**v** = $\|v\|^2 = 0$

## Contoh dan Pembahasan

1. Diketahui di dimensi 3 ($R^3$), terdapat vektor $\bar{a}$dan $\bar{b}$.

$\bar{b}$= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Didapat bahwa, ternyata: ($\bar{a} \bullet \bar{b}$) $\overline{\mu_a}$= $\bar{a}$.

Tentukan besar sudut yang dibentuk antara $\bar{a}$dan $\bar{b}$!

Jawab:

($\bar{a} \bullet \bar{b}$) $\overline{\mu_a}$= $\bar{a}$

$|\bar{a}|. |\bar{b}|. \cos\theta. \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}= \bar{a}$

$|\bar{b}|. \cos\theta$= 1

$\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cos\theta$= 1

$\cos\theta= \frac{1}{2}$

Jadi, $\theta= 60^0$

2.

Jika $|\bar{a}|$= 4, berapakah $\bar{a}\bullet\bar{a}$?

Jawab:

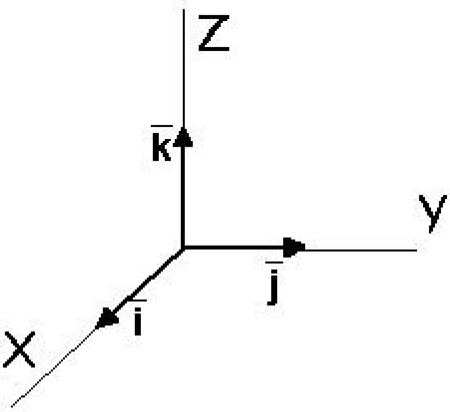
$\bar{a}\bullet\bar{a}= |\bar{a}|.|\bar{a}| \cos\theta$(kita tahu bahwa vektor $\bar{a}$dan $\bar{a}$itu sudutnya $0^0$)

$\bar{a}\bullet\bar{a}=|\bar{a}|^2$

$\bar{a}\bullet\bar{a}$=16

**Karakteristik Dot Product**

Di sini kita akan bermain-main dengan vektor satuan. Kita akan melihat vektor di dimensi ruang ($R^3$), jadi akan ada 3 vektor basis di sini yaitu $\bar{i}$, $\bar{j}$, dan $\bar{k}$.




$\bar{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, dan $\bar{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Sesuai dengan definisi Dot Product, maka didapat karakteristik sebagai berikut.

$\bar{i}\bullet\bar{i}=|\bar{i}|.|\bar{i}|.\cos\theta$ = 1 (ingat bahwa sudut yang dibentuk adalah $0^0$)

$\bar{j}\bullet\bar{j}=|\bar{j}|.|\bar{j}|.\cos\theta$ = 1

$\bar{k}\bullet\bar{k}=|\bar{k}|.|\bar{k}|.\cos\theta$ = 1

Selain itu, nilainya adalah nol. Lihat di bawah.

$\bar{i}\bullet\bar{j}=|\bar{i}|.|\bar{j}|.\cos\theta$ = 0 (karena sudut yang dibentuk adalah $90^0$)

$\bar{i}\bullet\bar{k}=|\bar{i}|.|\bar{k}|.\cos\theta$ = 0

$\bar{j}\bullet\bar{i}=|\bar{j}|.|\bar{i}|.\cos\theta$ = 0

$\bar{j}\bullet\bar{k}=|\bar{j}|.|\bar{k}|.\cos\theta$ = 0

$\bar{k}\bullet\bar{i}=|\bar{k}|.|\bar{i}|.\cos\theta$ = 0

$\bar{k}\bullet\bar{j}=|\bar{k}|.|\bar{j}|.\cos\theta$ = 0

Sifat yang dimiliki dot product ini adalah komutatif (dibolak-balik hasilnya sama..)

Dengan melihat karakteristik itu, maka kita dapat mengalikan $\bar{a}\bullet\bar{b}$tanpa perlu tahu sudutnya. Lihat penguraian di bawah.

$\bar{a}= x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$

$\bar{b}= x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$

$\bar{a}\bullet\bar{b}$ $= (x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})\bullet(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})$

$= x_1\bar{i}\bullet x_2\bar{i}+x_1\bar{i}\bullet y_2\bar{j}+x_1\bar{i}\bullet z_2\bar{k}+$

$y_1\bar{j}\bullet x_2\bar{i}+y_1\bar{j}\bullet y_2\bar{j}+y_1\bar{j}\bullet z_2\bar{k}+$

$z_1\bar{k}\bullet x_2\bar{i}+z_1\bar{k}\bullet y_2\bar{j}+z_1\bar{k}\bullet z_2\bar{k}$

$= x_1x_2(\bar{i}\bullet\bar{i})+ x_1y_2(\bar{i}\bullet\bar{j})+x_1z_2(\bar{i}\bullet\bar{k})+$

$y_1x_2(\bar{j}\bullet\bar{i})+y_1y_2(\bar{j}\bullet\bar{j})+y_1z_2(\bar{j}\bullet\bar{k})+$

$z_1x_2(\bar{k}\bullet\bar{i})+z_1y_2(\bar{k}\bullet\bar{j})+z_1z_2(\bar{k}\bullet\bar{k})$

$= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Contoh Soal:

Jika $\bar{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ dan $\bar{b}=\begin{pmatrix}4\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$, berapa sudut yang dibentuk oleh kedua vektor itu?

Jawab:

$\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

$(-1)(4)+(2)(\frac{1}{2})+(3)(-1) = \sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}\,.\,\sqrt{4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}\,.\cos\theta$

$-6 = \sqrt{14}\,.\,\sqrt{17,25}\,.\cos\theta$

$-6 = 15,5403 \cos\theta$ (menggunakan kalkulator)

$\cos\theta = -\ 0,386$

$\theta = 112,71^0$ (menggunakan kalkulator)

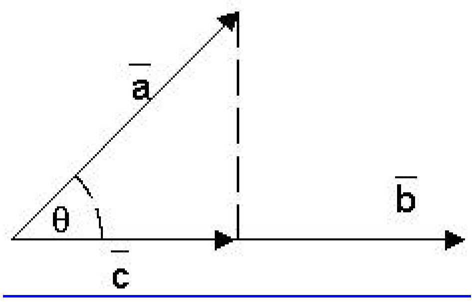
Ternyata dot vektor dapat digunakan untuk menghitung sudut dengan rumus:

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}$$

**Proyeksi Vektor**

Di contoh soal di atas, dot product dapat digunakan untuk mencari sudut apit. Namun, sesungguhnya dot vektor dapat digunakan untuk kemampuan yang lebih, yaitu mencari vektor proyeksi. Lihat penjelasan di bawah.

Misalkan diberikan vektor $\bar{a}$dan $\bar{b}$. $\bar{c}$adalah proyeksi vektor $\bar{a}$ke $\bar{b}$, maka dapat digambarkan sebagai berikut. (Sebenarnya, pangkal vektor $\bar{a}$dan $\bar{b}$tidak harus berhimpit, namun, dianggap demikian supaya lebih mudah dipahami).




Pertama, tama kita akan mencoba mencari panjang vektor $\bar{c}$.

Sesuai dengan aturan trigonometri: $\cos\theta = \frac{|\bar{c}|}{|\bar{a}|}$... (i)

Sesuai dengan operasi dot vektor: $\cos\theta = \frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}$... (ii)

Gabungkan kedua persamaan di atas, maka akan kita dapatkan rumus untuk $|\bar{c}|$

$$\frac{|\bar{c}|}{|\bar{a}|} = \frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}$$

$$|\bar{c}| = \frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Karena $\bar{b}$dan $\bar{c}$ berhimpit, maka dapat kita simpulkan bahwa vektor satuan dari $\bar{b}$sama dengan vektor satuan dari $\bar{c}$.

$$\overline{\mu_c} = \overline{\mu_b}$$

Ingat rumus untuk vektor satuan sebelumnya, maka persamaan di atas menjadi:

$$\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

$$\bar{c} = |\bar{c}| \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

$$\frac{|\bar{c}|}{|\bar{a}|} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{a}| . |\bar{b}|}$$

$$|\bar{c}| = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Karena $\bar{b}$dan $\bar{c}$berhimpit, maka dapat kita simpulkan bahwa vektor satuan dari $\bar{b}$sama dengan vektor satuan dari $\bar{c}$.

$$\overline{\mu_c} = \overline{\mu_b}$$

Ingat rumus untuk vektor satuan sebelumnya, maka persamaan di atas menjadi:

$$\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

$$\bar{c} = |\bar{c}| \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Substitusikan nilai $|\bar{c}|$, maka didapat:

$\bar{c} = \dfrac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b}$ (vektor proyeksi dari $\bar{a}$ke $\bar{b}$)

Untuk mencari vektor proyeksi dari $\bar{b}$ke $\bar{a}$, maka kita tinggal ganti simbol:

$\bar{c} = \dfrac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{a}|^2} \bar{a}$ (vektor proyeksi dari $\bar{b}$ke $\bar{a}$)

Contoh Soal:

Diketahui vektor $\bar{a}$dan $\bar{b}$bukan $\vec{0}$(vektor yang panjangnya 0) memenuhi kondisi berikut.

$|\bar{a}|= 2\,|\bar{b}|= |\bar{a}+3\bar{b}|$.

Sudut yang dibentuk $\bar{a}$dan $\bar{b}$adalah $\theta$. Tentukan $\cos\theta$!

Jawab:

Ini adalah soal vektor yang tricky. Mungkin pada awalnya kita kesulitan karena bingung memulai dari mana. Tapi, kita bisa memulai dari apa yang ditanyakan. $\cos\theta$selalu berhubungan dengan $\bar{a}\bullet\bar{b}$, maka inilah hal yang pertama kali kita lakukan.

$\bar{a}\bullet\bar{b}= |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

Substitusi nilai $|\bar{a}|= 2\,|\bar{b}|$:

$\bar{a}\bullet\bar{b}= 2\,|\bar{b}|.\,|\bar{b}|\cos\theta$

$\bar{a}\bullet\bar{b}= 2\,|\bar{b}|^2\cos\theta$... (i)

Lalu, kita tinggal menentukan untuk mengolah $|\bar{a}+3\bar{b}|$. Supaya lebih mudah, maka sebaiknya kita kalikan vektor $(\bar{a}+3\bar{b})$dengan dirinya sendiri.

$(\bar{a}+3\bar{b})\bullet(\bar{a}+3\bar{b})= \bar{a}\bullet\bar{a}+ 6\,(\bar{a}\bullet\bar{b}) + 9\,(\bar{b}\bullet\bar{b})$

$|\bar{a}+3\bar{b}|^2= |\bar{a}|^2+ 6\,(\bar{a}\bullet\bar{b}) + 9|\bar{b}|^2$

Karena $|\bar{a}|= |\bar{a}+3\bar{b}|$(diketahui di soal), maka persamaan tersebut menjadi:

$\cancel{|\bar{a}+3\bar{b}|^2} = \cancel{|\bar{a}|^2} + 6\,(\bar{a}\bullet\bar{b}) + 9|\bar{b}|^2$

$6\,(\bar{a}\bullet\bar{b}) = -9|\bar{b}|^2$

$\bar{a}\bullet\bar{b}= -\frac{3}{2}|\bar{b}|^2$... (ii)

Substitusikan persamaan (ii) ke (i), maka:

$-\frac{3}{2}|\bar{b}|^2= 2\,|\bar{b}|^2\cos\theta$

$\cos\theta= -\frac{3}{4}$

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. https://yos3prens.wordpress.com/2015/08/10/hasil-kali-titik-dua-vektor/ diakses pada tanggal 09 Maret 2016
4. http://hendrydext.blogspot.co.id/2008/12/mengenal-dot-dan-cross-product_04.html diakses pada tanggal 09 Maret 2016
5. https://aimprof08.wordpress.com/2012/09/27/hasil-kali-titik-pada-vektor-dot-prdoduct/ diakses pada tanggal 09 Maret 2016

MODUL PERKULIAHAN

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Perkalian Kali atau Cross Product

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 06 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui perkalian kali atau cross product.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami operasi perkalian kali dua vector, serta luas segitiga menggunakan perkalian kali.

# Perkalian Kali atau Cross Product

**Pendahuluan**

Kita tahu bahwa dot vektor sangat berperan dalam perhitungan sudut dan vektor proyeksi. Keistimewaan dot terletak pada $\cos\theta$ yang membuat perkalian vektor bersudut $90^0$ akan bernilai nol, sehingga mempermudah perhitungan. Lalu, bagaimana dengan cross Product?

A. Definisi

Cross ($\times$) Product adalah bentuk perkalian antara 2 vektor yang akan menghasilkan vektor yang tegak lurus dengan kedua vektor itu di dalam dimensi 3, yang didefinisikan dalam rumus:

$\bar{a}\times\bar{b}= |\bar{a}|.\,|\bar{b}|.\,\sin\theta.\,\bar{\mu}$

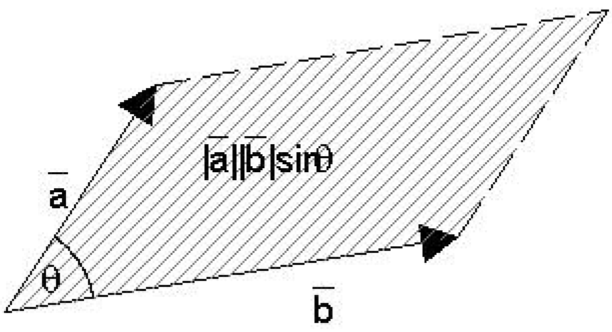
di sini $\bar{\mu}$ adalah vektor satuan yang tegak lurus dengan vektor $\bar{a}$ dan tegak lurus dengan vektor $|\bar{b}|$.

Hasil dari cross product adalah vektor yang tegak lurus dengan vektor $\bar{a}$dan vektor $\bar{b}$. Kenapa bisa begitu? Ini karena pengaruh perkalian vektor-vektor satuan $\bar{a}$ dan $\bar{b}$. Untuk lebih jelasnya, bisa dilihat di bagian karakteristik cross product.

Sementara, jika kita ingin meng-skalar-kan cross product, maka unsur $\bar{\mu}$ dapat kita hilangkan, maka rumusnya menjadi:

$|\bar{a}\times\bar{b}|= |\bar{a}|.\,|\bar{b}|.\,\sin\theta$

Di sini, kita tahu bahwa $|\bar{a}|.\,|\bar{b}|.\,\sin\theta$ adalah rumus Luas jajargenjang. Wah, ternyata kita bisa mencari luas jajargenjang dari sudut pandang vektor! ^^



Perkalian silanga A x B pada vektor didefinisikan sebagai suatu vektor yang arahnya tegak lurus pada bidang dimana vektor A dan B berada dan mengikuti aturan tangan kanan, sementara besarnya vektor tersebut sama dengan hasil kali dari besar kedua vektor dengan sinus sudut apit antara kedua vektor tersebut. Secara matematis dirumuskan

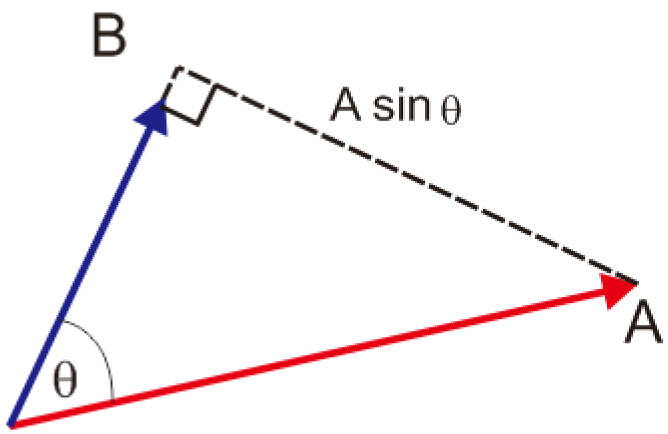
$$A \times B = A \sin \theta$$

Berikut adalah hal-hal penting dalam perkalian silang dua buah vektor

a. Nilia 0º Pada perkalian titik dua vektor berlaku **sifat distributif** sebagaimana dijelaskan di atas.
b. Perkalian silang bersifat **anti komutatif A x B = -B x A**
c. Jika kedua vektor A dan B saling *tegak lurus* yaitu sudut apit teta = 90º maka **|A x B| = AB**
d. Jika kedua vektor A dan B segaris (teta = 0º) dapat searah atau berlawanan maka **A x B = 0**

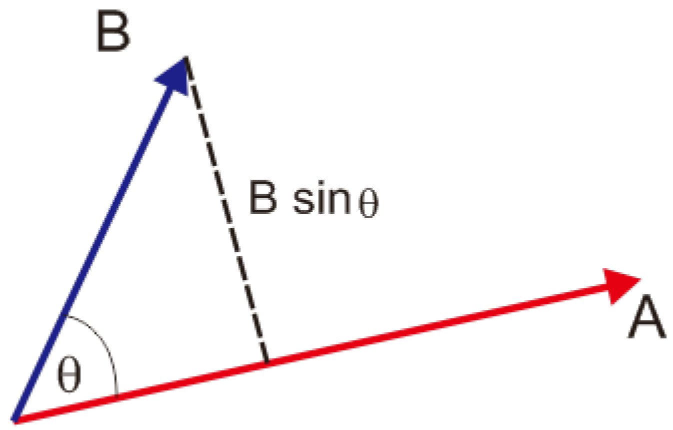
**Besar Vektor Hasil Perkalian Silang**

Sesuai rumus di atas, kita dapat menyimpulkan besarnya hasil perkalian silang vektor A dan B (A x B) adalah hasil kali vektor A dengan komponen vektor B yang tegak lurus dan sebidang dengan vektor A.




***A x B = A (B sin θ) = AB sin θ***

Bagaimana kalau kita balik menjadi perkalian silang vektor B dengan vektor A? Kita buat ilustrasinya terlebih dahulu seperti gambar di bawah ini




Dari gambar di atas perkalian silang antara vektor B dan vektor A adalah hasil kali besar vektor B dengan komponen vektor A yang tegak lurus dan sebidang dengan vektor B.

***B x A = B (A sin θ) = BA sin θ***

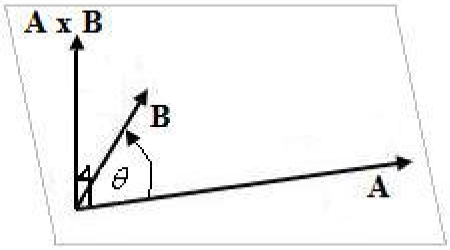
**Arah Vektor Hasil Perkalian Silang**

Sekarang bagaimana menetukan arah dari hasil perkalian silang vektor A x B dan B x A?

**<u>Arah  Hasil Perkalian Silang A x B</u>**

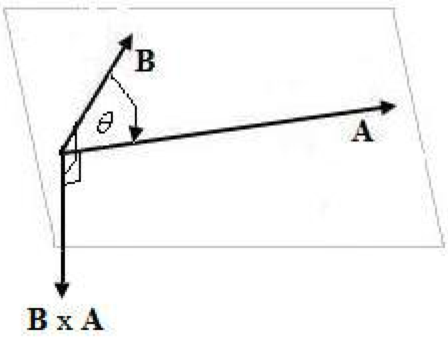
Seperti disebutkan sebelumnya perkalian silang hasilnya adalah vektor bukan skalar. Jadi ia juga punya arah. Besarnya hasil perkalian sudah kita temukan rumusnya di atas, sekarang kita akan belajar bagaimana menentukan arahnya. Kita gambar dulu kedua vektor A dan B (vektor A dan B ada bidang datar yang sama)

Kita misalkan hasil perkalian silang A x B adalah vektor C. Arah vektor C nih tegak lurus dengan bidang vektor A dan B. Untuk menentukan arahnya kita bisa menggunakan kaidah tangan kanan. Kita menggunakan tangan dengan empat jari digenggamkan dan ibu jari yang diacungkan. Kita genggamkan jari searah dengan arah dari A ke B (karena perkalian silang A x B) sehingga arahnya akan berlawanan dengan arah jarum jam. Kita tegakkan ibu jari dan arah yang ditunjukkan oleh ibu jari tersebut adalah arah vektor C. Ibu jari menunjuk ke atas.




**Arah Hasil Perkalian Silang B x A**

Caranya seperti sebelumnya karena B x A maka arah genggaman jari (selain ibu jari) sesuai arah B ke A. Arahnya adalah searah dengan arah jarum jam. Maka ibu jari menunjuk kebawah. Simak ilustrasi berikut.




**Perkalian Silang dengan Vektor Satuan**

Kita dapat menghitung perkalian silang jika kita mengetahui komponen vektor yang diketahui. Cara dan urutannya mirip pada perkalian titik.

**Pertama**

Kita lakukan perkalian silang vektor satuan i, j, dan k. (ingar perkalian silang A x B = AB sin θ). Karena ketiga vektor satuan saling tegak lurus maka

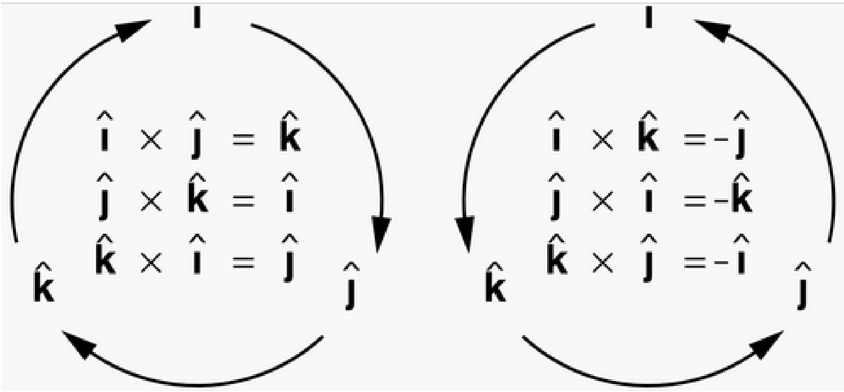
i x i = ii sin 0º = 0

j x j = jj sin 0º = 0

k x k = kk sin 0º = 0

maka i x i = j x j = k x k = 0

untuk perkalian silang vektor satuan yang berbeda menggunakan atura siklus **berikut**




**Aturannya**

jika perkalian menurut urutan i -> j -> k maka hasilnya positif (sesuai siklus) jika perkalian berkebalikan k-> j -> i maka hasilnya adalah negatif (berlawanan siklus)

### Kedua

Kita nyatakan vektor A dan B dalam komponen-komponennya, menguraikan perkaliannya dan menggunakan perkalian dari vektor-vektor satuannya.

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}) \times (B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}})$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ | = | $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ | × | $B_x\,\hat{\mathbf{i}}$ | + | $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ | × | $B_y\,\hat{\mathbf{j}}$ | + | $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ | × | $B_z\,\hat{\mathbf{k}}$ |
| | | $+A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ | × | $B_x\,\hat{\mathbf{i}}$ | + | $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ | × | $B_y\,\hat{\mathbf{j}}$ | + | $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ | × | $B_z\,\hat{\mathbf{k}}$ |
| | | $+A_z\,\hat{\mathbf{k}}$ | × | $B_x\,\hat{\mathbf{i}}$ | + | $A_z\,\hat{\mathbf{k}}$ | × | $B_y\,\hat{\mathbf{j}}$ | + | $A_z\,\hat{\mathbf{k}}$ | × | $B_z\,\hat{\mathbf{k}}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ | = | $A_xB_y\,\hat{\mathbf{k}}$ | − | $A_xB_z\,\hat{\mathbf{j}}$ |
| | − | $A_yB_x\,\hat{\mathbf{k}}$ | + | $A_yB_z\,\hat{\mathbf{i}}$ |
| | + | $A_zB_x\,\hat{\mathbf{j}}$ | − | $A_zB_y\,\hat{\mathbf{i}}$ |

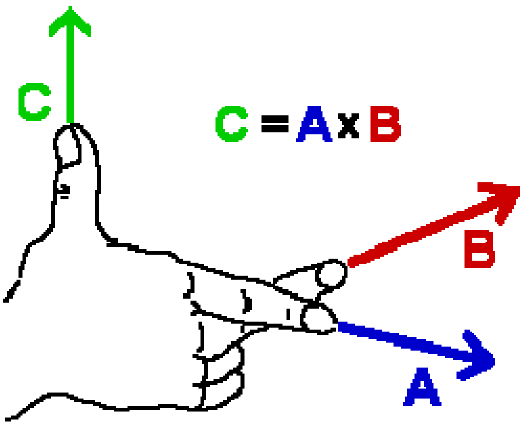
$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{\mathbf{k}}$

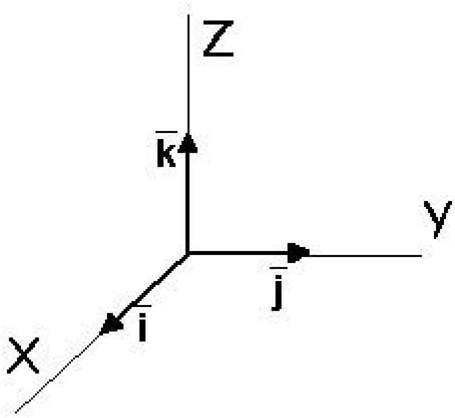
## Karakteristik Cross Product

Di dimensi 3 terdapat 3 vektor basis sebagai berikut.

$\bar{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, dan $\bar{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Vektor yang tegak lurus ada 2 arah (berlawanan). Supaya konsisten, maka kita tentukan arahnya dengan aturan tangan kanan. Ini dilakukan supaya hasilnya **konsisten** dan **universal**. Jadi, ini semacam aturan umum saja. (Sebenarnya jika kita memakai aturan tangan kiri, kita akan mendapatkan hasil yang tegak lurus juga, namun hasilnya negatif. Sebenarnya, ini boleh saja dilakukan).




Sesuai dengan definisi di atas, maka didapat karakteristik sebagai berikut.

$\bar{i}\times\bar{i}=\vec{0}$ (karena sudutnya $0^0$)

$\bar{j}\times\bar{j}=\vec{0}$

$\bar{k}\times\bar{k}=\vec{0}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$ | | $\bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$ | | $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$ |
| $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$ | | $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$ | | $\bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}$ |

Terlihat bahwa perkalian cross product tidak bersifat komutatif..

Sekarang kita coba mengoperasikan $\bar{a}\times\bar{b}$

$\bar{a}= x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$

$\bar{b}= x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$

| | |
|---|---|
| $\bar{a}\times\bar{b}$ | $=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})\times(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})$<br>$=x_1x_2(\bar{i}\times\bar{i})+x_1y_2(\bar{i}\times\bar{j})+x_1z_2(\bar{i}\times\bar{k})+$<br>$y_1x_2(\bar{j}\times\bar{i})+y_1y_2(\bar{j}\times\bar{j})+y_1z_2(\bar{j}\times\bar{k})$ +<br>$z_1x_2(\bar{k}\times\bar{i})+z_1y_2(\bar{k}\times\bar{j})+z_1z_2(\bar{k}\times\bar{k})$<br>$=x_1x_2.\bar{0}+x_1y_2.\bar{k}+x_1z_2(-\bar{j})+$<br>$y_1x_2(-\bar{k})+y_1y_2.\vec{0}+y_1z_2.\bar{i}+$<br>$z_1x_2.\bar{j}+z_1y_2(-\bar{i})+z_1z_2\vec{0}$<br>$=\bar{i}(y_1z_2-z_1y_2)-\bar{j}(x_1z_2-z_1x_2)+\bar{k}(x_1y_2-y_1x_2)$<br><br>(Supaya dapat lebih mudah dibaca *dan dihapal*, kita gunakan konsep determinan)<br>$=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$<br>(gunakan cara Sarrus untuk mencari determinan ordo 3x3) |

Maka, akan didapat vektor yang tegak lurus $\bar{a}$ dan $\bar{b}$.

**Contoh Soal 15:**

Di $R^3$, terdapat vektor $\bar{a}$dan $\bar{b}$.

$\bar{a}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$dan $\bar{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tentukan $\bar{a}\times\bar{b}$dan $\bar{b}\times\bar{a}$.

Jawab:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} (0)(3)-(-3)(2) \\ (-3)(-1)-(3)(5) \\ (5)(2)-(0)(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(*Determinan 3x3 di atas dapat diselesaikan dengan cara Sarrus biasa..*)

$$\bar{b}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(-3)-(0)(3) \\ (3)(5)-(-1)(-3) \\ (-1)(0)-(2)(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

dapat kita lihat bahwa: $\bar{a}\times\bar{b}$= -($\bar{b}\times\bar{a}$).

**Contoh Soal 16:**

Dari contoh soal 15, berikan 5 contoh vektor yang tegak lurus dengan vektor $\bar{a}$dan vektor $\bar{b}$!

Jawab:

Kita sudah menemukan 2 vektor yang tegak lurus, yaitu: $\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$, dan $\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Berikutnya, kita tinggal menemukan vektor-vektor yang sejajar dengan vektor itu. Jadi, kita hanya mengalikan konstanta sesuka apapun yang kita mau. Misalnya:

Kalikan $\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$dengan $\frac{1}{2}$, maka hasilnya: $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$==> ini contoh yg ke-3

Kalikan $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$dengan 3, maka hasilnya: $\begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix}$==> ini contoh ke-4

Kalikan $\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$dengan 2, maka hasilnya $\begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ -20 \end{pmatrix}$==> ini contoh ke-5

Tentunya, akan ada banyak jawab. Intinya, cukup mengalikan $\bar{a}\times\bar{b}$ dengan konstanta apapun.

**Contoh Soal 17:**

Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (0,1,2) dan terdapat vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$dan $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$di bidang itu!

Jawab:

Pertama, tentukan dulu $\overline{a}\times\overline{b}$ (kita sudah mendapatkannya di soal nomor 15) Nah, itulah yang disebut dengan vektor normal. Vektor normal adalah karakteristik yang dimiliki oleh bidang. (kalau karakteristik gradien dimiliki oleh garis). Nah, kita tinggal mengikuti rumus persamaan bidang berikut:

pers. bidang: $n_1(x-x_1)+n_2(y-y_1)+n_3(z-z_1)=0$

Kita sudah mendapat salah 1 contoh vektor normal di contoh nomor 16, yaitu $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Substitusikan nilai 3 di n1, 6 di n2, dan -5 di n3. Maka, persamaan bidangnya menjadi:

$$-3(x-x_1)+6(y-y_1)-5(z-z_1)=0$$

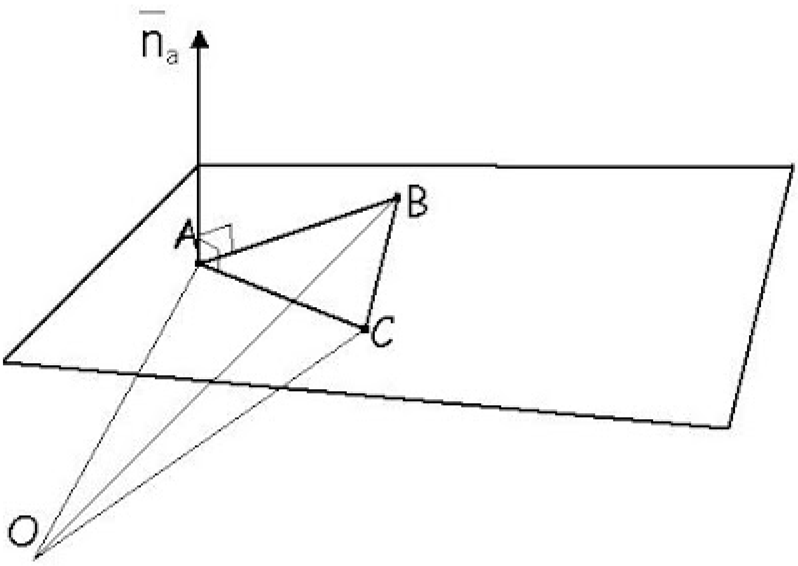
Bidang itu melalui titik (0,1,2). Oleh karena itu, substitusikan nilai 0 di x1, 1 di x2 dan 2 di x3. Maka persamaannya menjadi:

$$-3(x-0)+6(y-1)-5(z-2)=0$$

pers. bidang: $-3x+6y-5z=-4$

**Contoh soal 18:**

Tentukan persamaan bidang yang melalui titik A(0,1,-3), B (2,4,-1), dan C(-2,3,5)! Jawab:



Tentukan 2 vektor yang terletak pada bidang. Di sini, kita mencari vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$. (Boleh mencari yang lain).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-1 \\ -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 3-1 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Sekarang kita cari vektor yang tegak lurus dengan kedua vektor ini. Caranya? Ya, menggunakan cross product!!

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(8)-(2)(2) \\ (2)(-2)-(2)(8) \\ (2)(2)-(3)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Sekarang tinggal memasukkan nilai-nilai itu ke persamaan bidang:

$$n_1(x-x_1) + n_2(y-y_1) + n_3(z-z_1) = 0$$

Masukkan n1=20 , n2=-20, n3 = 10

$$20(x-x_1) - 20(y-y_1) + 10(z-z_1) = 0$$

Bagi persamaan dengan 10, supaya lebih sederhana.

$$2(x-x_1) - 2(y-y_1) + (z-z_1) = 0$$

Masukkan titik yang terletak pada bidang. Terserah kalian ingin memasukkan titik A, atau B, ataupun C, karena semua titik akan menghasilkan hasil yang sama.

Di sini, kita masukkan titik A (0,1,-3). Berarti x1=0.x2=1. x3=-3.

$$2(x-0) - 2(y-1) + (z-(-3)) = 0$$

pers bidang: $2x - 2y + z = -5$

**Sifat – sifat Khusus Cross Product**

Kita sudah tahu bahwa cross dan dot product memiliki sifat distributif. Lalu, bagaimana jika sudutnya 0. Tentu kita sudah tahu. Di sini, dibahas sifat-sifat yang tidak diberikan secara eksplisit (dan juga jarang terpakai):

1. $|\overline{a} \times \overline{b}|^2 = |a|^2 . b^2| - (\overline{a} \bullet \overline{b})^2$

=> Untuk Membutikannya, cukup jabarkan ruas kiri. Lalu ubah $\sin^2 \theta$ menjadi $1 - \cos^2 \theta$.

2. $\overline{a} \bullet (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \bullet \overline{c}$

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. http://rumushitung.com/2014/11/08/perkalian-vektor-dan-contoh-soal/
4. http://hendrydext.blogspot.co.id/2008/12/mengenal-dot-dan-cross-product_04.html

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Garis dan Bidang di Ruang Dimensi 3

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 07 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui garis dan bidang di ruang dimensi 3.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami kedudukan garis dan bidang serta jarak suatu titik kesatuan bidang dalam ruang dimensi.

# Garis Dan Bidang di Ruang Dimensi 3

**Pendahuluan**

Materi dimensi tiga berkaitan dengan mempelajari bangun-bangun ruang, yang secara garis besar meliputi penentuan jarak, menentukan panjang proyeksi dan menentukan besar sudut. Sebagai trigger sebelum memulai pembelajaran tentang Geometri dimensi tiga bisa saja dikemukakan persoalan-persoalan yang berkaitan dengan geometri semisal:

1. Bagaimana menentukan jarak antara dua bagian gedung yang satu dengan lainnya agar dapat ditentukan misalnya kebutuhan kabel untuk keperluan tertentu?
2. Bagaimana menentukan jarak antara kabel jaringan arus kuat yang melintasi bangunan-bangunan agar medan listrik tidak mengganggu penghuninya maupun alat-alat elektronik di dalamnya?
3. Bagaimana pula seorang dokter bedah dapat menentukan letak dan jarak antara tumor di dalam batok kepala di luar selaput otak di belakang lintasan syaraf-syaraf agar arah pembedahannya tepat?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas perlu dipahami pengertian dan cara menentukan jarak antara dua benda. Jika membicarkan jarak sering kita dihadapkan pada dua benda. Untuk itulah pembahasan jarak dalam ruang dilakukan idealisasi dan penyederhanaan agar sifat-sifat umumnya mudah dipahami. Untuk mengembalikannya pada konteks permasalahanya, maka cara menentuukan jarak itu mungkin memerlukan pemahaman atau strategi tambahan.

## A. Kedudukan Titik, Garis, Dan Bidang Dalam Ruang

### 1. Pengertian Titik, Garis Dan Bidang

Tiga unsur dasar dalam geometri, yaitu titik, garis, dan bidang. Ketiga unsur tersebut, dapat juga disebut sebagai tiga unsur yang tak didefinisikan.

#### a. Titik

*Menurut Stanley R. Clemens et al., (1984: 10-11), Point : location, no lenght, width or height. A point as a part of a a physical object. A point as the smallest dot you can draw. A point is an idea, or abstraction. Since a point cannot be defined using simpler terms, it is anundefined term.*

Sebuah titik hanya dapat ditentukan oleh lokasi/letaknya, tidak mempunyai ukuran (panjang, lebar, dan tinggi). Sebuah titik merupakan titik terkecil yang bisa digambar. Titik merupakan sebuah ide atau abstraksi. Karena titik tidak dapat didefinisikan dengan istilah sederhana, maka sebuah titik digambarkan menggunakan noktah dan ditulis menggunakan huruf kapital seperti P, Q, M, N, atau O.

**Titik** merupakan komponen bangun ruang yang tidak berbentuk dan tidak mempunyai ukuran. Suatu titik digambarkan atau dimodelkan sebagai noktah dan penamaannya menggunakan huruf besar.

Contoh :

Titik A → ·A

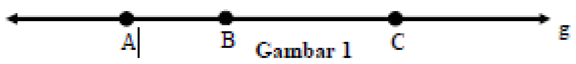
Titik M → ·M

**b. Garis**

*Menurut Stanley R. Clemens et al., (1984: 10-11), Line : unlimited length, straight, no thickness, no endpoints. A line as part of a physical situation. A line as the thinnest streak you can draw. A line is an idea or abstraction. Since a line cannot be defined using simpler term it is an undefined term.*

Sebuah garis mempunyai panjang tak terbatas, lurus, tidak tebal, tidak ada titik akhir. Namun mengingat terbatasnya bidang tempat gambar, sebuah garis hanya dilukiskan sebagian saja/sangat tipis. Bagian ini disebut *wakil garis*. Garis hanya mempunyai ukuran panjang tetapi tidak mempunyai ukuran lebar. Garis merupakan sebuah gagasan atau abstraksi. Karena titik tidak dapat didefinisikan dengan istilah sederhana, maka nama sebuah garis dapat dinyatakan dengan menyebutkan wakil dari garis tersebut menggunakan huruf kecil: l, g, k atau menyebutkan nama segmen garis dari titik pangkal ke titik ujung.

**Garis** merupakan komponen bangun ruang yang hanya mempunyai ukuran panjang. Garis dapat dipandang sebagai himpunan titik-titik. Selain itu untuk memberi nama sebuah garis, dapat memanfaatkan dua buah titik pada garis tersebut, atau dengan sebuah huruf kecil. Cara menuliskannya: $\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ atau g. Misalnya seperti gambar berikut:



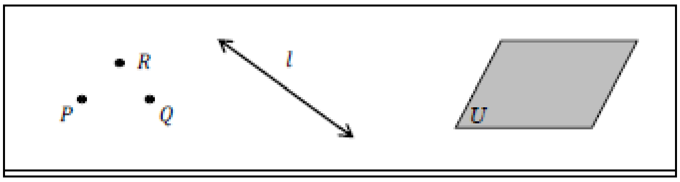
Gambar 1

Pada gambar di atas garis g dapat dinyatakan sebagai garis $\overleftrightarrow{CA},$ atau $\overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ karena garis g melalui titik A, titik B, dan titik C. Lambang $\overleftrightarrow{AB}$ artinya garis yang melalui titik A dan titik B, atau garis yang memuat titik A dan titik B. Lambang "$\overleftrightarrow{AC},$ artinya garis yang melalui titik A dan titik C, atau garis yang memuat titik A dan titik C. Lambang "$\overleftrightarrow{BC},$" artinya garis yang melalui titik B dan titik C, atau garis yang memuat titik B dan titik C. Lambang $\overleftrightarrow{AB}$ " dan lambang "$\overleftrightarrow{BA},$" maknanya sama, yaitu garis yang melalui titik A dan titik B, atau garis yang memuat titik A dan titik B.

**c. Bidang**

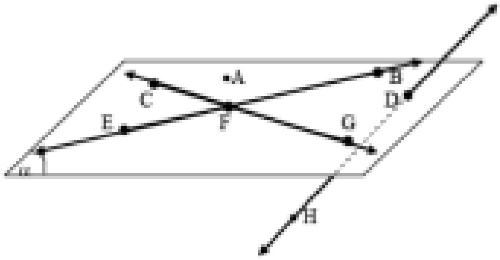
*Menurut Stanley R. Clemens et al., (1984: 10-11), Plane : no boundary, continues in all directions, flat, not thickness. A plane as a part of a physical object. A plane as the thinnest slice you can cut.*

Sebuah bidang dapat diperluas seluas-luasnya/tidak ada batas, terus kesegala arah, datar, tidak tebal. Pada umumnya sebuah bidang hanya dilukiskan sebagian saja yang disebut sebagai wakil bidang. Wakil suatu bidang mempunyai ukuran panjang dan lebar. Gambar dari wakil bidang dapat berbentuk persegi atau bujur sangkar, persegi panjang, atau jajargenjang. Nama dari wakil bidang dituliskan di sudut bidang dengan memakai huruf α, β, γ atau H, U, V, W atau dengan menyebutkan titik-titik sudut dari wakil bidang itu.




**Sebuah bidang** difikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet dan berjajar secara rapat dan tak terbatas, tetapi tidak memiliki ketebalan. Sebuah bidang direpresentasikan dengan gambar sebuah jajargenjang, dan nama sebuah bidang dapat menggunakan sebuah huruf capital atau huruf Yunani.

**Bidang** merupakan komponen bangun ruang yang mempunyai luas. Bidang dapat dipandang sebagai himpunan titik-titik. Yang disebut bidang di sini adalah bidang datar, yaitu bangun yang dapat digambarkan sebagai suatu yang datar dan mempunyai luas tidak terbatas. Bidang digambarkan dengan model terbatas yang mewakilinya. Bidang tersebut dinamakan bidang α atau bidang ABC. Harus diingat, penamaan bidang dengan titik-titik yang dilaluinya minimal menggunakan tiga titik.




Pada gambar di atas bidang $\alpha$ memuat titik-titik A, B, C, D, E, F, G, (*dikatakan ketujuh titik tersebut terletak pada bidang-α*); $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$ keduanya pada bidang-$\alpha$ dan berpotongan di F. $\overleftrightarrow{HD}$ memotong (menembus) bidang- $\alpha$ di titik D.

Dari Gambar 2 tersebut, dapat dituliskan antara lain:

A € α artinya titik A pada bidang - $\alpha$ ;

F $\overleftrightarrow{BE}$, artinya titik F pada $^{\leftarrow}\overleftrightarrow{BE}$ ;

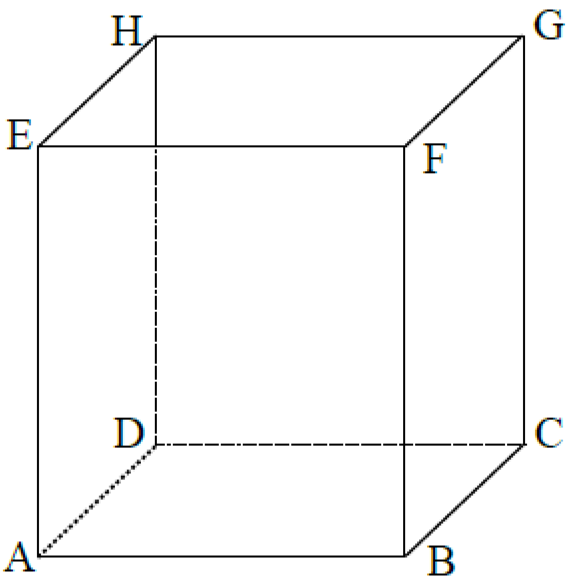
$\overleftrightarrow{BE} \in$ α artinya $\overleftrightarrow{BE}$ pada bidang- α;

F = $\overleftrightarrow{BE} \cap \overleftrightarrow{GC}$ , artinya titik F adalah titik potong $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$ ;

D =α ∩ $\overleftrightarrow{HD}$ , artinya titik D adalah titik potong (titik tembus) $\overleftrightarrow{HD}$ pada bidang α

α = bidang ( $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$ ), artinya bidang α adalah bidang yang memuat $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{GC}$ , dan sebagainya.

## B. Kedudukan Garis terhadap Garis lain



a. *Dua garis sejajar* adalah apabila keduanya tdk mpy titik perse- kutuan walaupun diperpanjang contoh :

- AB sejajar dg CD - AB sejajar dg EF
- AB sejajar dg GH - AD sejajar dg EH

*b. Dua garis berpotongan*

adalah apabila 2 grs tsb hanya memiliki **satu titik persekutuan** ( ttk potong )

AB berpot dg AE ( di titik A )

AB berpot dg BF ( di titik B )

BC berpot dg CH ( di titik C )

DE berpot dg DC ( di titik D )

*c. Dua garis bersilangan* Adalah 2 grs yang tidak sejajar, & tdk terletak pada satu bidang. Contoh :

AC bersilangan dg BF, DH, EF, FG, GH, EH.

BF bersilangan dg AD, EH, CD, GH

## C. Kedudukan Garis terhadap Bidang

*a. Garis terletak pada bidang*

- AB terletak pd bdg ABCD
- BC, AC, BD, AD terletak pd bdg ABCD
- BF, BG, BC, FC terletak pd bdg BCFG

b. *Garis menembus bidang* Adl bila grs & bdg itu hanya mempunyai satu titik tembus ( titik persekutuan )

- AE menembus bdg ABCD di titik A
- BF, CG, DH, AG menembus bdg ABCD

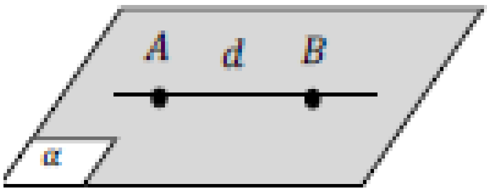
c. *Garis g sejajar dg bidang W* Adl bila garis g sejajar dengan garis yang terletak pada bidang W.

- AB sejajar dengan CDHG
- EF, FG, GH, EH, EG, HF sejajar dengan bidang ABCD

## D. Jarak Pada Bangun Ruang

a. Jarak Titik ke Titik

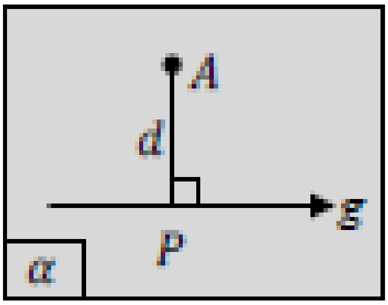
Menentukan jarak titik A ke titik B dalam suatu ruang dengan cara menghubungkan titik A dan titik B dengan ruas garis AB. Panjang ruas garis AB adalah jarak titik A ke titik B.




b. Jarak Titik ke Garis

Jarak titik ke suatu garis ada jika titik tersebut terletak di luar garis.

Langkah-langkah menentukan jarak titik A ke garis *g* (titik A tidak terletak pada garis *g*) adalah sebagai berikut:




- Buatlah bidang α yang melalui titik A dan garis
- Buatlah garis AP yang tegak lurus dengan garis g pada bidang α
- Panjang ruas garis AP = jarak titik A ke garis g.

c. Jarak Titik ke Bidang

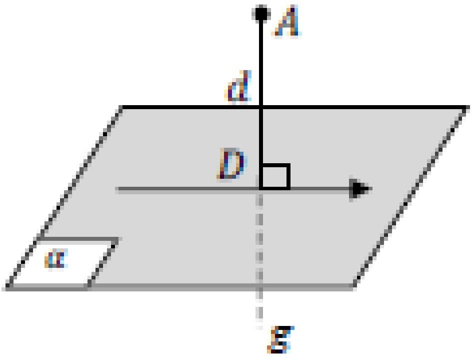
Jarak titik ke suatu bidang ada jika titik tersebut terletak di luar bidang.

Langkah-langkah menentukan jarak titik A ke bidang α (titik A tidak terletak pada bidang α) adalah sebagai berikut.

a. Buatlah garis *g* melalui titik A dan tegak lurus bidang α

b. Garis *g* menembus bidang α di titik D

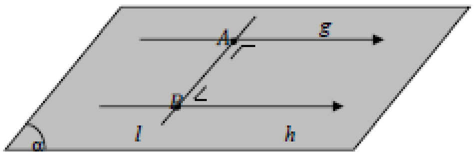
c. Panjang ruas garis AD = jarak titik A ke bidang α.




d. Jarak dua garis sejajar

Jarak antara dua garis sejajar (misal garis *g* dan garis *h*) dapat digambarkan sebagai berikut.

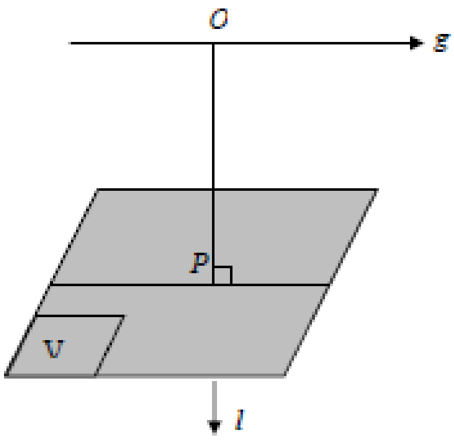
- Buatlah bidang α yang melalui garis *g* dan garis *h* (Teorema 4)
- Buatlah garis *l* yang memotong tegak lurus terhadap garis *g* dan garis *h*, missal titik potongnya berturut-turut di titik *A* dan *B*
- Panjang ruas garis *AB* = jarak antara garis *g* dan garis *h* yang sejajar.




e. Jarak garis dan bidang yang sejajar

Jarak antara garis dan bidang yang saling sejajar adalah panjang ruas garis yang masingmasing tegak lurus terhadap garis dan bidang tersebut.

Jarak antara garis *g* dan bidang *V* yang sejajar dapat digambarkan sebagai berikut:

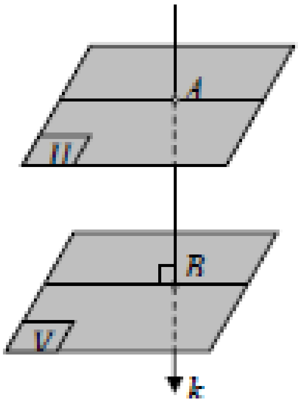


1. Buatlah titik *O* pada garis g.
2. Buatlah garis *l* yang melalui titik *O* dan tegak lurus bidang *V.*
3. Garis *l* memotong atau menembus bidang *V* di titik P.
4. Panjang ruas garis OP = Jarak antara garis g dan bidang *V* yang sejajar.

f. Jarak dua bidang sejajar

Jarak antara bidang *U* dan bidang *V* yang sejajar dapat digambarkan sebagai berikut.

1. Buatlah titik *A* pada bidang *V*.
2. Buatlah garis *k* yang melalui titik *A* dan tegak lurus bidang *V.*
3. Garis *k* menembus bidang *V* di titik B.
4. Panjang ruas garis AB= Jarak antara bidang *U* dan bidang *V* yang sejajar.

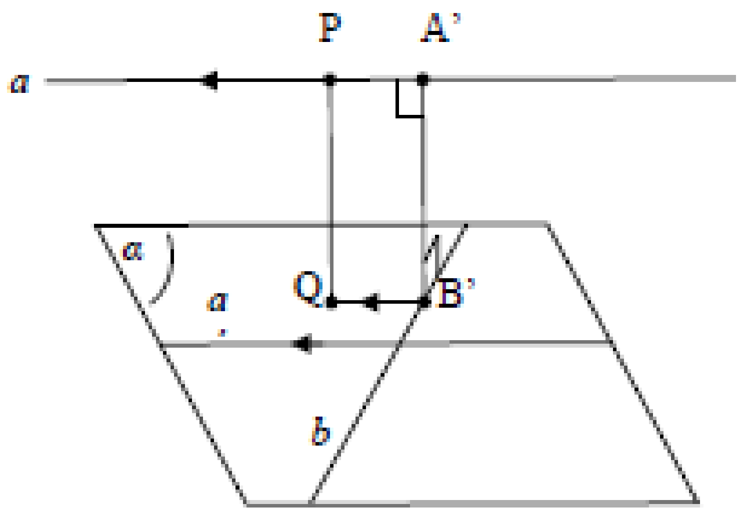



g. Jarak dua garis bersilangan

Jarak antara dua garis yang bersilangan (misal garis *a* dan garis *b*) dapat digambarkan sebagai berikut

Cara I

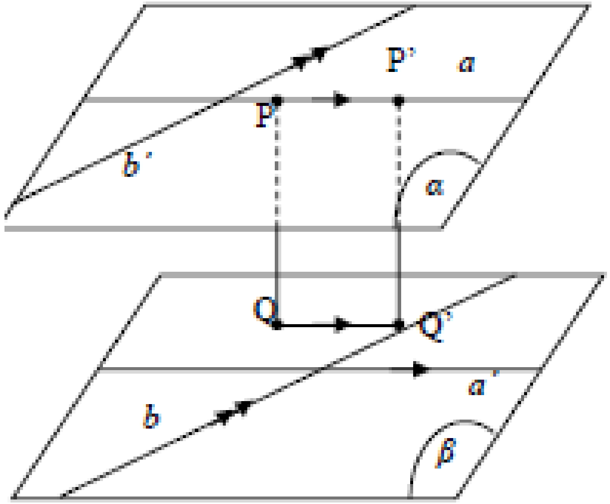
1. Buatlah garis *a'*, garis yang sejajar *a* dan memotong garis *b.*
2. Melalui garis *a'* dan garis *b* dapat dibuat sebuah bidang, yaitu bidang α.
3. Menentukan titik A yang terletak pada garis *a*.
4. Buatlah ruas garis AB yang tegaklurus dengan garis *a* dan bidang α, titik B terletak pada bidang α.
5. Panjang ruas garis AB merupakan jarak garis *a* ke bidang α.
6. Buatlah ruas garis A'B' yang sejajar ruas garis AB, titik A' terletak pada garis *a* dan titik B' terletak pada bidang α.
7. Panjang ruas garis A'B' merupakan jarak garis *a* ke garis *b*.




.

Cara 2;

1. Buatlah garis *b'*, garis yang sejajar *b* dan memotong garis *a*, sehingga melalui garis *b'* dan garis *a* dapat ditentukan satu bidang, yaitu bidang α.
2. Buatlah garis *a'*, garis yang sejajar *a* dan memotong garis *b*, sehingga melalui garis *a'* dan garis *b* dapat ditentukan satu bidang, yaitu bidang β.
3. Garis *a'* sejajar garis *a*, garis *b'* sejajar garis *b*, sehingga bidang α sejajar dengan bidang β.
4. Buatlah ruas garis PQ yang tegaklurus terhadap bidang α dan bidang β, titik P terletak pada bidang α, sedangkan titik Q terletak pada bidang β.
5. Panjang ruas garis PQ merupakan jarak bidang α ke bidang β.
6. Buatlah ruas garis P'Q' yang sejajar ruas garis PQ, titik P' terletak pada garis *a* dan titik Q' terletak pada garis *b*.
7. Panjang ruas garis P'Q' merupakan jarak garis *a* ke garis *b*.




**Latihan dan pembahasan**

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 10 cm. Hitunglah jarak antara :

a. Titik A ke H

b. Titik A ke P (P adalah perpotongan diagonal ruang)

c. Titik A ke garis CE

d. Titik A ke bidang BCGF

e. Titik A ke bidang BDHF

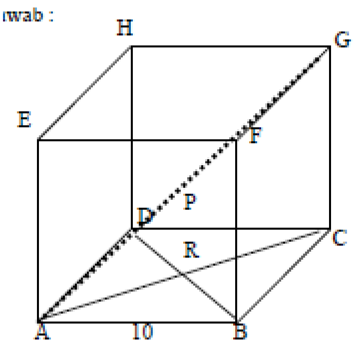
f. Titik A ke bidang BDE

g. Garis AE ke garis CG

h. Garis AE ke garis CG

i. Bidang ABCD ke EFGH

jawab



a. Jarak titik A ke H = AH

AH = *AD*2 □ *DH* 2

$$= \sqrt{AD^2 + DH^2}$$
$$= \sqrt{100 + 100}$$
$$= \sqrt{200}$$
$$= 10\sqrt{2}$$

b. Jarak titik A ke P = AP

= ½ AG

= $\frac{10}{2}\sqrt{3}$ cm

c.Jarak A ke CE = AK

Pada segitiga siku-siku CAE

L CAE = ½.AC.AE = ½.CE.AK

$$\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10 = \sqrt{2}\cdot 10\sqrt{3}\cdot AK$$

$$AK = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10}{\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}}$$

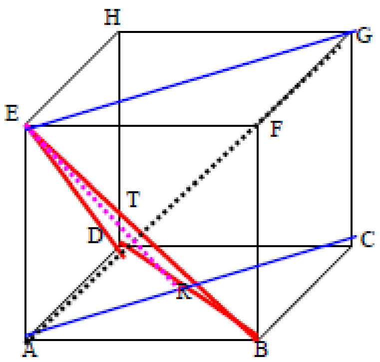
$$AK = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$AK = \frac{10}{3}\sqrt{6}$$

d. Jarak titik A ke bidang BCGF = AB = 10 cm

e. Jarak titik A ke bidang BDHF = AR (R titik tengah garis BD) AR = ½ AC = ½ $10\sqrt{2}$ = $5\sqrt{2}$ cm

g. Jarak titik A ke bidang BDE




Perhatikan persegi panjang ACGE sbb :

Garis AG berpotongan tegak lurus dengan

Garis ER dititik T, sehingga jarak A ke

Bidang BDE adalah AT.

$$= \sqrt{AR^2 + AE^2}$$

$$= \sqrt{50 + 100}$$

$$= \sqrt{150}$$

$$= 5\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2 \cdot 10} = 5\sqrt{2}.AT$$

$$50\sqrt{2} = 5\sqrt{6}.AT$$

$$AT = \frac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \frac{10}{3}\sqrt{3}cm$$

h. Jarak AE ke CG = AC = $10\sqrt{3}$

i. Jarak ABCD dan EFGH = AC = 10 cm

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. *www.matematrick.com › Kelas X diakses pada tanggal 09 Maret 2016*

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Ruang Vektor Umum

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 09 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui ruang vector umum.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami arti kebebasan linear, ruang baris dan kolom dari matriks rank.

# Ruang Vektor Umum

*1. Ruang Vektor Umum*

**Definisi**

Misalkan *V* sebarang himpunan benda yang dua operasinya kita definisikan yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil). Penjumlahan tersebut kita pahami untuk mengasosiasikan sebuah aturan dengan setiap pasang benda ***u*** dan ***v*** dalam *V,* yang mengandung elemen ***u + v,*** yang kita namakan jumlah ***u*** dan ***v***, dengan perkalian skalar kita artikan setiap benda ***u*** pada *V* yang mengandung elemen **k*u*,** yang dinamakan perkalian skalar ***u*** oleh k. Jika semua aksioma berikut dipenuhi oleh semua benda ***u, v, w*** pada *V* dan oleh semua skalar k dan l, maka kita namakan *V* sebuah ruang vektor dan benda – benda pada *V* kita namakan vektor :

Aksioma - aksioma tersebut adalah sebagai berikut :

(1). Jika ***u*** dan ***v*** adalah benda – benda pada *V* kita namakan vektor

(2). ***u + v = v + u***

(3). ***u + (v + w) = (u + v) + w***

(4). Ada vektor ***0*** di *V* sehingga ***0 + u = u + 0 = u*** untuk semua ***u*** di *V*

(5). Untuk setiap ***u*** di *V*, terdapat ***–u*** sehingga ***u + (-u) = (-u) + u = 0***

(6). Jika k adalah sebarang skalar dan ***u*** adalah sebarang vektor di *V*, maka k***u*** berada di *V*

(7). k***(u + v*** )= k***u*** + k***v***

(8). (k + l)***u*** = k***u*** + l***u***

(9). k(l***u***) = l(k***u***)

(10). 1***u*** = ***u***

Skalar dapat berupa bilangan real atau bilangan kompleks, tergantung pada aplikasinya. Ruang vektor dimana scalar -skalarnya adalah bilangan kompleks disebut ruang vektor kompleks ( complex vector space , dan ruang vektor dimana skalar-skalarnya merupakan bilangan real disebut ruang vektor real (ruang vektor real).

Definisi dari suatu ruang vektor tidak menyebutkan sifat dan vektor maupun operasinya. Objek apa saja dapat menjadi suatu vektor dan operasi penjumlahan dan perkalian skalar kemungkinan tidak memiliki hubungan atau kemiripan apapun dengan operasi-operasi vektor standar pada Rn, asalkan kesepuluh aksioma ruang vektor terpenuhi.

Contoh berikut akan memberikan gambaran mengenai kemungkinan keragaman vektor tersebut. Pada setiap contoh, akan diberikan suatu himpunan V tak kosong dan dua operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Kemudian akan dibuktikan bahwa kesepuluh aksioma ruang vektor terpenuhi, sehingga V dapat disebut sebagai suatu ruang vektor dengan melakukan operasi-operasi yang telah ditentukan.

Contoh soal :

Ruang vektor matriks 3x2

1.M = {semua matriks berordo 3x2}. Operasi penjumlahan pada M adalah operasi penjumlahan matriks. Operasi perkaliannya adalah perkalian skalar dari F dengan anggota-anggota M. Apakah M merupakan ruang vektor ?

Penyelesaian :

Misalkan matrik A, matrik B, dan matrik C adalah elemen dari M.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

## Aksioma 1:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}$$

Maka aksioma 2 terbukti karena A+B adalah matrik berordo 3x2.

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=B+A$$

Maka aksioma 2 terpenuhi.

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}=(A+B)+C$$

Maka aksioma 3 terpenuhi.

$$A+0=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=A$$

Maka aksioma 4 terpenuhi.

$$A+(-A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=(-A)+A=0$$

Maka aksioma 5 terpenuhi.

$$kA=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{bmatrix}$$

Maka aksioma 6 terpenuhi.

$$k(A+B)=k\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}\right)=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=kA+kB$$

Maka aksioma 7 terpenuhi.

$$(k+l)A=(k+l)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+l\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=kA+lA$$

Maka aksioma 8 terpenuhi.

$$k(lA)=k\left(l\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right)=kl\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=(kl)A$$

Maka aksioma 9 terpenuhi.

$$1A=1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=A$$

Maka aksioma 10 terpenuhi.

Karena kesepuluh aksioma terpenuhi maka himpunan M merupakan suatu ruang vektor

***2. SubRuang (subspace)***

**Definisi**

Sub himpunan W dari sebuah ruang vektor V disebut sub ruang (subspace) V jika W itu sendiri adalah ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

***3. Vektor yang bebas linear dan Tak Bebas Linear***

---

**Definisi**

Himpunan m buah vektor ($\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots \boldsymbol{u_m}$) disebut tak bebas linier (*linearly dependent*) bila terdapat skalar – skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ yang tidak semuanya nol sedemikian hingga ($\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots \boldsymbol{u_m}$)

Sebaliknya himpunan ($\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots \boldsymbol{u_m}$) disebut bebas linier (*linearly independent*) jika $\lambda_1 \boldsymbol{u_1} + \lambda_2 \boldsymbol{u_2} + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{u_m} = \boldsymbol{0}$ hanya dipenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

*Catatan* :

1. Jika m=1, maka :
   a. Bila $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (vektor nol), akan tak bebas linier, karena $\lambda u = 0$

      $\rightarrow \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ terpenuhi juga untuk $\lambda \neq 0$

   b. Bila $\lambda \neq \boldsymbol{0}$, akan bebas linier karena $\lambda\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ hanya dipenuhi oleh $\lambda = 0$
2. Jika dalam himpunan terdapat vektor 0, misalnya {$\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{0}, \ldots \boldsymbol{u_m}$) maka himpunan itu tak bebas linier,

   $\lambda_1 \boldsymbol{u_1} + \lambda_2 \boldsymbol{u_2} + \ldots + \lambda_i \boldsymbol{0} + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{u_m} = \boldsymbol{0}$ dipenuhi juga oleh $\lambda_I \neq 0$
3. JIka $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah 2 vektor yang berkelipatan, $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v}$, maka mereka tak bebas linier. Sebab $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v} \rightarrow 1\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{v} = 0$, artinya terdapat $\lambda \neq 0$ pada $\lambda_1 \boldsymbol{v} + \lambda_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

*a. Kombinasi Linier*

**Definisi**

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor – vektor ($\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots \boldsymbol{u_m}$) bila terdapat skalar – skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sedemikian hingga $v = \lambda_1 \boldsymbol{u_1} + \lambda_2 \boldsymbol{u_2} + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{u_m}$.

Contoh 2.1

***a*** = [2, 1, 2], ***b*** = [1, 0, 3], ***c*** = [3, 1, 5]

Kita hendak menyatakan ***a*** sebagai kombinasi linier dari ***b*** dan ***c***

Kita hitung $\lambda_1$, dan $\lambda_2$ yang memenuhi [2, 1, 2] = $\lambda_1$ [1, 0, 3] + $\lambda_2$ [3, 1, 5]

$2 = \lambda_1 + 3\lambda_2$

$1 = \lambda_2$

$2 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2$

Dengan substitusi, diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$

Jadi penulisan yang diminta adalah ***a = -b + c***

**a.** *Arti Kombinasi Linier Secara Ilmu Ukur*

(1). Kalau ***v*** kombinasi linier dari suatu vektor ***u***, yaitu $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$ yang mana ***v*** adalah kelipatan dari ***u*** dengan garis pembawanya sama (atau sejajar), ***v*** dan ***u*** disebut *koliner* (segaris).

(2). ***v*** kombinasi linier dari 2 vektor $\boldsymbol{u_1}$ ***dan*** $\boldsymbol{u_2}$, yaitu $\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{u_1} + \lambda_2\boldsymbol{u_2}$ maka ***v*** adalah diagonal jajaran genjang yang sisi – sisinya $\lambda_1\boldsymbol{u_1}$ dan $\lambda_2\boldsymbol{u_2}$. $\boldsymbol{u_1}$ dan $\boldsymbol{u_2}$ disebut *koplanar* (sebidang).

(3) ***v*** kombinasi linier dari 3 vektor $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ ***dan*** $\boldsymbol{u_3}$, yang tidak sebidang, yaitu $\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{u_1} + \lambda_2\boldsymbol{u_2} + \lambda_3\boldsymbol{u_3}$ maka ***v*** adalah diagonal paralelepipedum yang sisi – sisinya $\lambda_1\boldsymbol{u_1}$, $\lambda_2\boldsymbol{u_2}$ dan $\lambda_3\boldsymbol{u_3}$.

### *4. Dimensi dan Basis*

**Definisi**

Jika *V* adalah sebarang ruang vektor dan *S* = {$v_1$, $v_2$, …, $v_r$} merupakan himpunan berhingga dari vektor – vektor pada *S*, maka *S* disebut ***basis*** untuk *V* jika :

i. S bebas linier

ii. S merentang *V*

**Definisi**

***Dimensi*** sebuah ruang vektor *V* yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis untuk *V*.

Contoh:

Tentukan dimensi dari ruang vektor yang dibentuk oleh :

(i). ***p*** = [1, -2, 3, 1] dan ***q*** = [2, -4, 5, 2]

(ii). ***u*** = [5, 7, 11, 4] dan ***v*** = [10, 14, 22, 8]

***Jawab*** :

(i). Kedua vektor pembentuk tidak berkelipatan, jadi sistem pembentuk bebas linier. Berarti dimensi = 2

(ii). Kedua vektor berkelipatan. Vektor ***u*** maupun ***v*** ≠ 0, jadi keduanya merupakan sistem pembentuk yang bebas linier. Berarti dimensi = 1

Latihan:

1. Tentukan dimensi dan basis dari ruang vektor yang dibentuk oleh :

   (i). ***a*** = [1, 1, 2], ***b***= [1, 2, 5] , ***c*** = [5, 3, 4]

   (ii). ***p*** = [1, 2, 2], ***q*** = [2, 4, 4] , ***r*** = [1, 0, 1]

   (ii) ***u*** = [1, 0, 1], ***v*** = [3, 0, 3] , ***w*** = [2, 0, 2]

2. Apakah himpunan – himpunan vektor ini merupakan basis R-3 ?

   (i). [1, 1, 1] , [1, -2, 3]

   (ii). [1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1]

   (iii). [1, 1, 2], [1, 2, 5], [5, 3, 4]

3. Diketahui L dibentuk oleh ***p*** = [1, 3, 1], ***q***= [2, 1, 0], dan ***r*** = [ 4, x-2, 2]

   Ditanya :

   (i) Nilai x supaya L berdimensi 2

   (ii) Nilai y supaya vektor a = [3, 2-y, 4] $\in$ L{p,q,r}

   (iii) Koordinat a di atas relative terhadap basis {p,q}

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. *syamsulanam.dosen.narotama.ac.id/files/2011/.../Modul-Aljabar-Linear.**d**...di akses pada tanggal 12 April 2016*
3. Purwanto, dkk. 2005 .Aljabar Linier. Jakarta: PT. ERCONTARA RAJAWALI.
4. Anton, Howard. 2000. Aljabar Linier Elementer. Jakarta : Erlangga.

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Basis Ortonormal dan Koordinat Perubah Basis

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 10 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui basis ortonormal dan koordinat perubah basis.

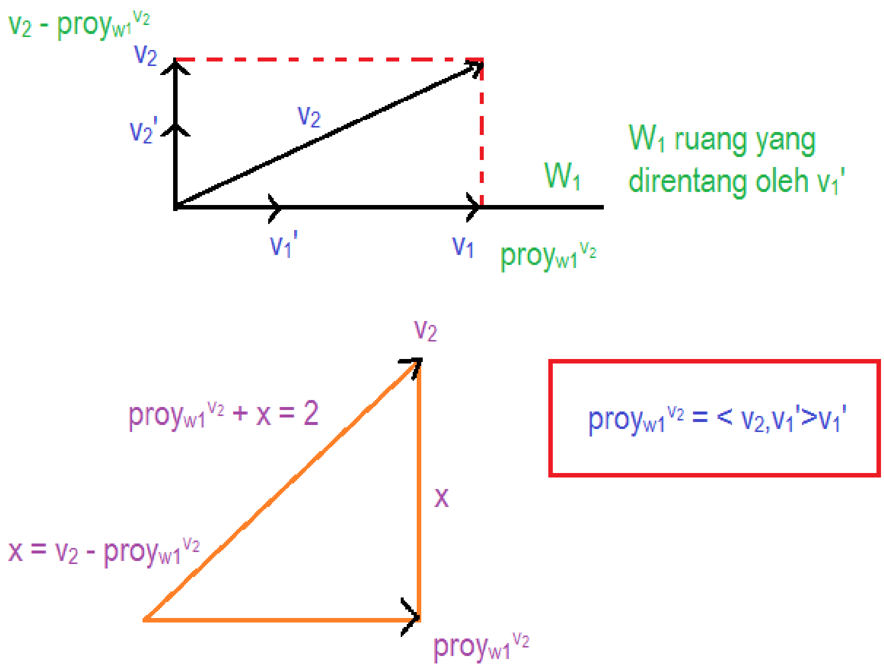

### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami pengertian basis ortonormal dan koordinat perubah basis.

# Basis Ortonormal

Di dalam banyak soal menyangkut ruang vector, maka pemilihan sebuah basis untuk ruang tersebut adalah menurut kehendak orang yang memecahkan soal tersebut. Secara alami, maka siasat yang paling baik adalah memilih basis untuk menyederhanakan pemecahan soal yang dihadapi. Di dalam ruang perkalian dalam, seringkali kasusnya adalah bahwa pilihan terbaik adalah sebuah basis di dalam mana semua vector orthogonal teradam satu sama lain. Di dalam bagian kita memperlihatkan bagaimana basis seperti itu dibangun.

Definisi:
Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangaan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. sebuah himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norma 1 dinamakan ortonormal.



Berikut ini diberikan contoh himpunan orthogonal dan himpunan orthonormal.

Contoh :

S={u1,u2,u3} dengan u1=[1,2,1], u2=[1,-1,1], dan u3=[1,0,-1].

Himpunan S adalah ortogonal pada $R^3$, karena [u1,u2]=[u1,u3]=[u2,u3]=0

Catatan:

- Jika S = $\{u_1, u_2,\ldots,u_n\}$ adalah adalah basis ortonormal untuk sebuah ruang hasil kali dalam V, dan jika x sembarang vektor di V, maka :

  $x = [x,u_1]u_1 + [x,u_2]u_2 + \ldots + [x,u_n]u_n$
- Misalkan V ruang hasil kali dalam dan $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ himpunan ortonormal Jika W ruang yang dibangun oleh $u_1,u_2,\ldots,u_n$ maka setiap vektor x dalam V dapat dinyatakan dengan : x = v + w dimana :

  $v = [v,u_1]u_1 + [v,u_2]u_2 + \ldots + [v,u_n]u_n$

Proses Gram-Schmidt

Setiap ruang hasil kali dalam berdimensi berhingga taknol, mempunyai sebuah basis ortonormal.

Misalkan S=$\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ basis untuk ruang hasil kali dalam V, algoritma untuk menentukan ortonormal B=$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ untuk V adalah :

Langkah 1. Ambil, $v_1 = u_1/|u_1|$

Langkah 2. Hitung, $v_2$ , dengan rumus :
$$v_2 = \frac{u_2 - [u_2, v_1]v_1}{|u_2 - [u_2, v_1]v_1|}$$

Langkah 3. Hitung, $v_3$ , dengan rumus:
$$v_3 = \frac{u_3 - [u_3, v_1]v_1 - [u_3, v_2]v_2}{|u_3 - [u_3, v_1]v_1 - [u_3, v_2]v_2|}$$

Langkah 4. Hitung, $v_k$ , dengan rumus :
$$v_k = \frac{u_k - [u_k, v_1]v_1 - [u_k, v_2]v_2 - \ldots - [u_k, v_{k-1}]v_{k-1}}{|u_k - [u_k, v_1]v_1 - [u_k, v_2]v_2 - \ldots - [u_k, v_{k-1}]v_{k-1}|}$$

**Teorema 23**. Jika S=($v_1$, $v_2$,…,$v_n$)adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam V,dan u adalah sebarang vector dalam V, maka

$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle u, v_n\rangle v_n$

*bukti*. Karena S = ($v_1$, $v_2$,…,$v_n$)adalah basis, maka vector u dapat dinyatakan dalam bentuk

$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$

dengan memperlihatkan bahwa $k_1 = \langle u, v_i\rangle$untuk I = 1,2,….,n. untuk setiap vector $v_i$ dalam S kita peroleh

$\langle u, v_i\rangle = \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n , v_i\rangle$

$= k_1 \langle v_1 , v_i\rangle, + k_2 \langle v_2 , v_i\rangle + \ldots + k_n \langle v_n , v_i\rangle$

*Karena S =($v_1$, $v_2$,…,$v_n$)adalah himpunan ortonormal maka kita peroleh*

$\langle v_i , v_i\rangle = \|v_i\|^2 = 1$ *dan* $\langle v_i , v_j\rangle = 0$ *if* $j \neq i$

Maka persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$\langle u, v_i\rangle = k_i$

Contoh 62

Misalkan $v_1 = (0,1,0), \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ mudah untuk memeriksa bahwa S ={ $v_1$, $v_2$, $v_3$} adalah basis ortonormal untuk $R^3$ dengan hasil kali dalam euclidis. Nyatalah vektor u=(1,1,1) sebagai kombinasi linear vektor-vektor S.

Pemecahan

$\langle u_1, v_1\rangle = 1 \qquad \langle u_2, v_2\rangle = -\frac{1}{5} \qquad \langle u_3, v_3\rangle = \frac{7}{5}$

Sehingga, menurut teorema 23

$u = v_1 \quad \frac{1}{5} v_2 + \frac{7}{5} v_3$

Yakni,

$$(1,1,1) = (0,1,0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

**Teorema 24**. Jika S =($v_1$, $v_2$,…,$v_n$)adalah himpunan orthogonal vector taknol dalam ruang hasil kali dalam, maka S bebas linear.

*Bukti.* Anggaplah

$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = 0$

untuk mendemostrasikan bahwa S =($v_1$, $v_2$,…,$v_n$)bebas linear, maka kita harus membuktikan *bahwa* $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Untuk setiap $v_i$ dalam S, bahwa

$< k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n , v_i > = < 0, v_i > = 0$

Dari ortogonalitas S,$<v_j , v_i> = 0$ bila $j \neq 0$ sehingga

$k_i<v_j , v_i>=0$

karena vector-vektor S dianggap taknol, maka,$<v_j , v_i> \neq 0$. menurut aksioma kepositifan untuk hasil kali dalam. Maka $k_i$ =0. Karena indeks tikalas I sebarang, maka kita peroleh $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.; jadi S bebas linear.

**Teorema 25**. *Misalkan* V adalah ruang hasil kali dalam dan ($v_1$, $v_2$,…,$v_r$)adalah himpunan ortonormal dari vector-vektor V. jika W menyatakan ruang yang direntang oleh ($v_1$, $v_2$,…,$v_r$)maka setiap vector u dalam V dapat diungkapkan dalam bentuk

$u = w_1 + w_2$

dimana $w_1$ terletak di W dan $w_2$ ortogonal terhadap W dengan memisalkan

$w_1 = <u, v_1> v_1 + <u, v_2> v_2 + \ldots + <u, v_r> v_r$

$w_2 = u - v_1> v_1 - <u, v_2> v_2 - \ldots - <u, v_r> v_r$

**Teorema 26.** Setiap ruang hasil kali dalam berdimensi berhingga taknol mempunyai sebuah basis ortonormal.

**Teorema 27.** (teorema proyeksi) jika W adalah subruang yang berdimensi berhingga dari ruang hasil kali dalam V, maka setiap vector u pada V dapat dinyatakan persis mempunyai satu cara yaitu,

$u = w_1 + w_2$

dimana $w_1$ terletak di W dan $w_2$ ortogonal terhadap W.

**Teorema 28.** (teorema Aproksimasi terbaik). Jika W adalah subruang yang berdimensi berhingga dari ruang hasil kali dalam V dan jika u adalah vector di V maka adalah aproksimasi terbaik bagi u dari W dengan pengertian bahwa

$$\|u - proy\ u\| < \|u - w\|$$

*Untuk setiap vector w yang berbeda dari proy u.*

# Ortogonal

Himpunan vektor $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k\}$ dalam $R^n$ disebut himpunan ortogonal jika semua pasangan dalam himpunan vektor tersebut adalah ortogonal yaitu jika :

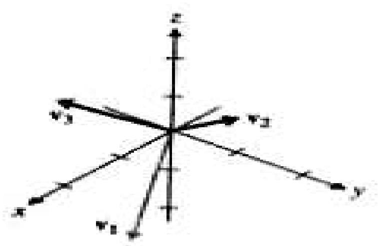
$v_i \cdot v_j = 0$ ketika $i \neq j$ untuk $i, j = 1, 2, \ldots\ldots, k$

Basis standar $\{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n\}$ dalam $R^n$ adalah himpunan ortogonal.

Contoh :

Tunjukkan bahwa $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah himpunan ortogonal dalam $R^3$ jika :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Jawab :

Harus ditunjukkan bahwa setiap pasang adalah ortogonal

$v_1 \cdot v_2 = 2(0) + 1(1) + (-1)(1) = 0$

$v_2 \cdot v_3$ = 0(1) + 1(-1) +(1)(1) = 0

$v_1 \cdot v_2$ = 2(1) + 1(-1) +(-1)(1)= 0

Kesimpulan : $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah himpunan ortogonal

**Teori 1.** Jika $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ adalah himpunan vektor bukan nol yang ortogonal, maka vektor-vektor tersebut adalah bebas linier.

**Bukti :**

Jika $c_1, c_2, \ldots, c_k$ adalah skalar sehingga : $c_1v_1 + \ldots + c_kv_k = 0$

kemudian $(c_1v_1 + \ldots + c_kv_k) \cdot v_i = 0 \cdot v_i = 0$

Atau hal yang sama :

$c_1(v_1 \cdot v_i) + \ldots + c_i(v_i \cdot v_i) + \ldots + c_k(v_k \cdot v_i) = 0$

Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ adalah himpunan ortogonal, semua perkalian titik pasangan vektor adalah nol kecuali $(v_i \cdot v_i)$, sehingga persamaan dapat diringkas menjadi : $c_i(v_i \cdot v_i) = 0$

Dengan hipotesa : $v_i \neq 0$ sehingga $v_i \cdot v_i \neq 0$, oleh karena itu yang harus memiliki nilai = 0 adalah $c_i$. Hal ini juga berlaku untuk semua $i = 1, \ldots k$, sehingga disimpulkan bahwa $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ adalah bebas linier.

**Basis Ortogonal**

**Definisi :** *Basis ortogonal dari subruang W dari $R^n$* adalah basis dari W merupakan himpunan ortogonal.

Contoh soal :

Cari basis ortogonal dari subruang $W$ dari $R^3$ yaitu :

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}$$

Subruang $W$ adalah bidang yang berada pada $R^3$, dari persamaan bidang diperoleh : $x = y - 2z$. Maka $W$ terdiri dari vektor dengan bentuk :

$$\begin{bmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi vektor u = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan v $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis W, namun tidak ortogonal. Untuk memenuhi syarat ortogonal, diperlukan vektor bukan nol lain dalam W yang ortogonal pada salah satu vektor tersebut.

Anggap $w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ adalah vektor dalam *W* yang ortogonal dengan *u*. Karena *w* dalam bidang *W* : $x-y+2z = 0$, maka $u.w = 0$ diperoleh persamaan : $x+y = 0$.

Dengan menyelesaikan SPL :

$x-y+2z = 0$

$x+y \quad = 0$

Didapatkan : $x = -z$ dan $y = z$

Jadi vektor tidak nol *w* dapat dituliskan dalam bentuk : $w = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix}$

Jika diambil $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dengan mudah dapat dibuktikan bahwa [*u,w*] adalah himpunan ortogonal dalam *W* , sehingga merupakan basis ortogonal *W* dan dim *W*=2.

# Koordinat; Perubahan Basis

KOORDINAT; PERUBAHAN BASIS

Terdapat hubungan erat di antara pemahaman basis dengan sistem koordinat. Pada bagian ini kita kembangkan gagasan tersebut dan juga kita bahas hasil-hasil mengenai perubahan basis untuk ruang vektor.

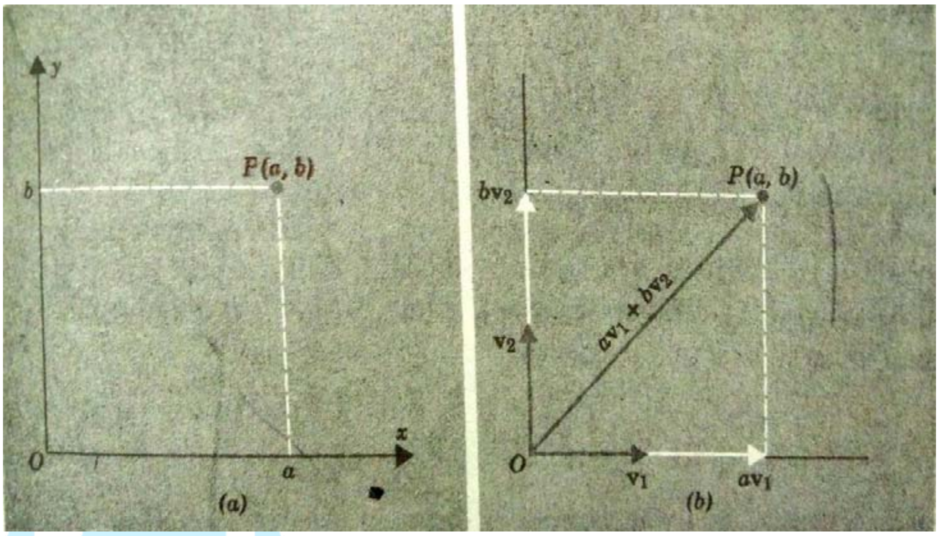
Dalam ilmu ukur analitik bidang, kita asosiasikan sepasang koordinat (a,b) dengan titik P pada bidang dengan menggunakan dua sumbu koordinat tegak lurus. Akan tetapi, koordinat tersebut dapat juga kita kenal tanpa acuan terhadap sumbu koordinat dengan menggunakan vektor-vektor. Misalnya, sebagai ganti pengenalan sumbu koordinat seperti pada Gambar 4.15a, tinjaulah dua vektor tegak lurus v1dan v2, masing-masing panjangnya 1, dan mempunyai titik awal O yang sama. (vektor-vektor ini membentuk basis untuk R2). Dengan menarik garis tegak lurus dari titik P terhadap garis-garis yang ditentukan oleh v1dan v2, maka kita peroleh vektor-vektor av1, dan bv2 sehingga

$$\overrightarrow{OP} = av_1 + bv_2$$

Gambar 4.15

(Gambar 4.15b). Jelaslah, bilangan a dan b yang baru kjita peroleh adalah seperti koordinat P yang relatif terhadap sistem koordinat pada Gambar 4.15a. jadi, kita dapat meminjam koordinat P sebagai bilangan yang diperlukan untuk mengungkapkan vektor dalam vektor basis v1dan v2.

Untuk tujuan mengaitkan koordinat-koordinat terhadap titik pada bidang itu, tidak perlu kiranya bahwa vektor basis v1dan v2harus slaing tegak lurus atau mempunyai panjang 1; sebarang basis untuk R2dapat kita gunakan. Misalnya, dengan menggunakan vektor basis v1 dan v2pada Gambar 4.16, kita dapat

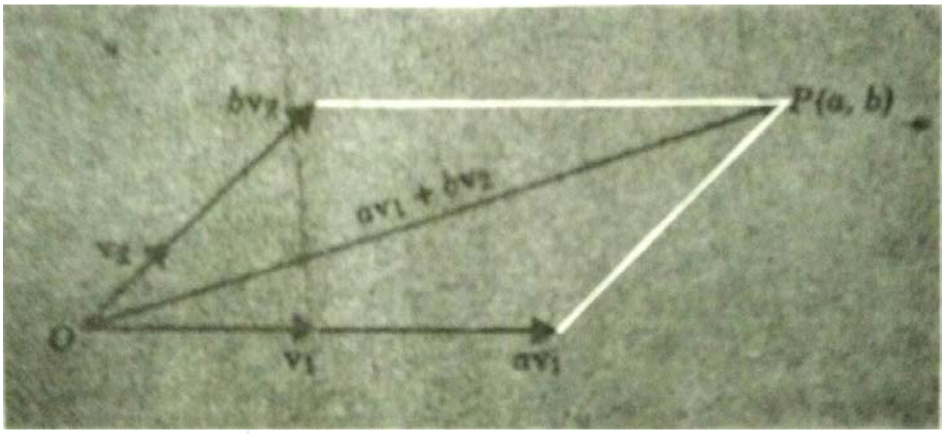


mengaitkan sepasang koordinat unik terhadap titik P dengan memproyeksikan P sejajar dengan vektor-vektor basis untuk membuat merupakan
diagonal bujursangkar yang ditentukan oleh vektor av1, dan bv2, jadi

$$\overrightarrow{OP} = av_1 + bv_2$$

Kita dapat menjabarkan (a,b) sebagai koordinat P yang relatif terhadap basis {v1, v2}. Pengertian koordinat yang digeneralisasi ini penting karena pengertian tersebut dapat diperluas untuk ruang vektor yang lebih umum. Tetapi mula-mula kita akan membutuhkan beberapa hasil pendahuluan

Gambar 4.16




Misalkan S = { v1, v2, … , vn } adalah basis untuk ruang vektor berdimensi berhingga V.

karena S merentang V, maka setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor S. disamping itu, sifat bebas linear S memastikan bahwa hanya ada satu cara untuk menyatakan vaktor sebagai kombinasi linear vektor-vektor S. Untuk melihat mengapa halnya demikian, misalkan vektor v dapat kita tulis sebagai

$v = c1v1 + c2v2 + . . . + CnVn$

dan juga

$v = k1v1 + k2v2 + . . . + KnVn$

Dengan mengurangkan persamaan kedua dari yang pertama maka akan memberikan

$0 = (c1 - k1)v1 + (c2 - k2)v2 + . . . + (cn – kn)vn$

Karena ruas kanan persamaan ini adalah kombinasi linear dari vektor S, maka sifat bebas linear dari S berarti bahwa

$(c1 - k1) = 0, c1 = k1$

$(c2 – k2) = 0, c2 = k1$

$(cn – kn) = 0, cn = kn$

sebagai ikhtisar, maka kita peroleh hasil berikut.

Teorema: Jika S = { v1, v2, … , vn } adalah basis untuk ruang vektor V yang berdimensi berhingga, danv = c1v1+ c2v2+ . . . + cnvn adalah pernyataan untuk v dalam basis S, maka scalar c1, c2, … , cn dinamakan koordinat v relatif terhadap basis S. Vektor koordinat v relatif terhadap S dinyatakan oleh (v)s danmerupakan vektor Rnyang didefinisikan oleh(v)s= (c1, c2, … , cn)

Matriks koordinat v relatif terhadap S yang dinyatakan oleh [v]ssedangkan matriks n × 1 didefinisikan oleh

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

**Teorema 29.** Jika S =($v_1, v_2, \ldots, v_r$)adalah basis untuk ruang vector V, maka setiap vector v yang terletak di V dapat dinyatakan dalam bentuk v= $c_1v_1, c_2v_2, \ldots, c_nv_n$ persis mempunyai satu cara.

Jika S==($v_1, v_2, \ldots, v_n$)adalah basis untuk ruang vector V yang berdimensi berhingga dan

v= $c_1v_1, c_2v_2, \ldots, c_nv_n$

adalah pernyataan untuk v dalam basis S, maka skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dinamakan koordinat relative terhadap basis S. vector koordinat dari v relative terhadap S dinyatakan oleh v dan merupakan vector $R^n$ yang didefinisikan oleh

$(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

Matriks koordinat v relative terhadap S yang dinyatakan oleh [v], sedangkan matriks $n \times 1$ didefinisikan oleh $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_3 \end{bmatrix}$

**Teorema 30.** Jika S adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam berdimensi n dan jika

$(u)_S = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $(v)_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Maka

(a) $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2, \ldots + u_n^2}$

(b) $d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

(c) $< u, v > = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$

**Teorema 31.** Jika P adalah matriks transisi dari basis $C$ ke basis B, maka

(a) P dapat dibalik

(b) $P^{-1}$ adalah matriks transisi dari B ke $B'$

Teorema 32. Jika P adalah matriks transisi dari satu basis ortonormal ke baris ortonormal yang lain untuk sebuah ruang hasil kali dalam, maka

$P^{-1} = P^t$

**Definisi.** Sebuah matriks A kuadart yang mempunyai sifat

$A^{-1} = A^t$

Kita katakana matriks orthogonal.

**Teorema 33.** Yang berikutekivalen satu sama lain:

(a) A adalah orthogonal

(b) Vektor-vektor baris dari A membentuk himpunan ortonormal $\mathbf{R}^n$ dengan hasil kali dalam Euclidis

(c) Vektor-vektor kolom A membentuk himpunan ortonormal $\mathbf{R}^n$ dengan hasil kali dalam Euclidis.

Contoh 75

Tinjaulah matriks

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Pemecahan

Vektor-vektor baris A adalah

$$r_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad r_2 = (0,0,1), \quad r_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Relatif terhadap hasil kali dalam euclidis, sehingga diperoleh

$$\|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1$$

Dan $< r_1, r_2 >= < r_1, r_3 > = < r_2, r_3 > = 0$

Sehingga vektor-vektor baris A membentuk himpunan ortonormal pada $R^3$. Jadi A ortogonal dan

$$A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. http://www.distrodoc.com/365024-basis-orthogonal-dan-basis-orthonormal
4. Janasari, Riri, Comelta, yati, dkk. 2013. *Aljabar Linear elementer tentang ruang vector*. Universitas mahaputra Nuhammad Yamin.

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Transformasi Linear dan Sifat Transformasi Linear

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | **11** | **MK15009** | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui transformasi linear dan sifat transformasi linear.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami pengertian transformasi linear dan sifat- sifatnya serta memahami proses transformasinya.

# Transformasi Linear

Jika V dan W adalah ruang vektor dan F adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah vektor yang unik di dalam W dengan sebuah vektor di dalam V, maka kita mengatakan F memetakan V ke dalam W,dan kita menuliskan F : V →W. Lebih lanjut lagi, jika F mengasosiasikan vektor wdengan vektor v, maka kita menuliskan w= F(v) dan kita mengatakan bahwa w adalah bayangan dari v di bawah F.

Untuk melukiskannya, maka jika v= (x,y) adalah sebuah vektor di dalam$R^2$, maka rumus

**F(v) = ( x , x + y , x -y )**

mendefinisikan sebuah fungsi yang memetakan R2ke dalam R3. Khususnya, jika v= (1,1) , maka x = 1 dan y = 1 , sehingga bayangan dari v di bawah F adalah F(v) = (1, 2, 0).

Definisi.

Jika F : V →W adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W, maka F dinamakan transformasi linear jika :

(i) F(u+ v) = F(u) + F(v) untuk semua vektor u dan v di dalam V.

(ii) F(ku) = k F(u) untuk semua vektor udi dalam V dan semua skalar k.

Untuk melukiskannya, misalkan F : R2→R3 adalah fungsi yang didefinisikan oleh

Jika u= ( x1, y1) dan v= ( x2, y2), maka u+ v= ( x1+ x2, y1 + y2), sehingga :

F(u+ v) = (x1+x2, [x1+ x2] + [y1+ y2], [x1+ x2] -[y1+ y2])

= ( x1, x1+ y1, x1-y1) + ( x2, x2+ y2,x2-y2)

F(u+ v) = F(u) + F(v)

Juga , jika k adalah sebuah skalar , k u= (kx1, ky1), sehingga

F(k u) = (kx1, kx1+ky1, kx1-ky1)

= k (x1, x1+y1,x1-y1)

= k F(u)

jadi F adalah sebuah transformasi linear.

Jika F : V →W adalah sebuah transformasi linear, maka untuk sebarang v1 dan v2 di dalam V dan sebarang k1dan k2, kita memperoleh :

F(k1v1+ k2v2) = F(k1v1) + F(k2v2) = k1F(v1) + k2F(v2)

Demikian juga, jika v1, v2, ... , vn adalah vektor-vektor di dalam V dan k1, k2, ... , kn adalah skalar, maka :

**F(k1v1+ k2v2+ ... + knvn) = k1F(v1) + k2F(v2) + ... + knF(vn)**

Contoh 1 :

Misalkan A adalah sebuah matriks m x n yang tetap. Jika kita menggunakan notasi matriks untuk vektor di dalam Rmdan Rn, maka kitadapat mendefinisikan sebuah fungsi T: Rn→Rmdengan :

T(x) = A x

Perhatikan jika bahwa xadalah sebuah matriks n x 1 , maka hasil kali A xadalah matriks m x 1 ; jadi T memetakan Rn ke dakam Rm . Lagi pula , T linear, untuk melihat ini , misalnya u dan vadalah matriks n x 1 dan misalkan k adalah sebuah skalar.

Dengan menggunakan sifat-sifat perkalaian matriks, maka kita mendapatkan :

A (u+ v) = A u+ A vdan A (k u) = k (A u)

atau secara ekivalen :

T(u+ v) = T(u) + T(v) dan T(k u) = k T(u)

Kita akan menamakan transformasi linear di dalam contoh ini perkalian oleh A. Transformasi linear semacam ini dinamakan transformasi matriks.

**Contoh 2**

Sebagai kasus khusus dari contoh sebelumnya, misalnya V = R3 mempunyai perkalian dalam Euclidis. Vektor-vektor w1= (1, 0, 0) dan w2= (0, 1, 0) membentuk sebuah basis

ortonormal untuk bidang xy. Jadi, jika v= (x, y , z) adalah sebarang vektor di dalam R3, maka proyeksi ortogonal dari R3
pada bidang xy diberikan oleh :

$T(v) = <v, w1>w1+ <v, w2>w2$

$= x(1, 0, 0 ) + y(0, 1, 0)$

$= (x, y , 0)$

Contoh 3

Misalkan V adalah sebuah ruang perkalian dalam dan misalkan v0adalah sebarang vektor tetap di dalam V. Misalkan T : V →R adalah transformasi yang memetakan sebuah vektor v ke dalam perkalian dalamnya dengan v0; yakni : T(v) = <v, v0>

Dari sifat-sifat perkalian dalam , maka :

T( u+ v) = <u+ v, v0 >= <u, v0>+ <v, v0>= T(u) + T(v) dan

T(k u) = <ku, v0>= k <u, v0>= k T(u) sehingga T adalah transformasi linear.

**Contoh 4**

Sebagai kasus khusus dari contoh sebelumnya, misalkan θ adalah sebuah sudut tetap, dan misalkan T : R2 → R2 adalah perkalian oleh matriks :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Jika v adalah vector $\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

maka $T(\underline{\mathbf{v}}) = A\,\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & +y\cos\theta \end{bmatrix}$

Secara geometrik, maka T(v) adalah vektor yang dihasilkan jika v dirotasikan melalui sudut

θ . Untuk melihat ini, maka misalkan φ adalah sudut di antara v dan sumbu x positif, dan mislakan :

$$\underline{\mathbf{v}}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

adalah vektor yang dihasilkan bila v dirotasikan melalui sudut θ kita akan memperlihatkan bahwa v’ = T(v). Jika r menyatakan panjangnya v , maka :

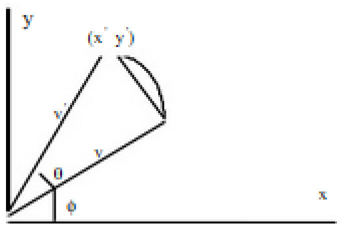
x = r cos φ

y = r sin φ

Demikian juga, karena v’ mempunyai panjang yang sama seperti v , maka kita memperoleh : x’ = r cos(θ + φ) y’ = r sin(θ + φ)

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{v'}} &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r\cos\theta+\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta+\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= A\mathbf{v} = T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Transformasi linear di dalam contoh ini dinamakan rotasi dari R2 melalui sudut Θ




Contoh 5

Misalkan V dan W adalah sebarang dua vektor. Pemetaan T : V → W sehingga T(v) = 0 untuk tiap-tiap v di dalam V adalah sebuah transformasi linear yang dinamakan transformasi nol. Untuk melihat bahwa T linear, perhatikanlah bahwa :

T(u + v) = 0 , T(u) = 0 , T(v) = 0 dan T(k u) = 0

Maka T(u + v) = T(u) + T(v) dan T(k u) = k T(u)

# Sifat Transformasi Linear

Pada bagiaan ini kita mengembangkan beberapa sifat dasar transformasi linear . khususunya, kata memperlihatkan bahwa sekali bayangan vektor basis di bawah transformasi linear telah diketahui, maka mungkin mencaari bayangan vektor yang selabihnya dalam ruang tersebut .

Teorema 1. Jika ***T:V*** ***W*** adalah transformasi linear , maka :

a) ***T*** ( 0 ) = 0

b) ***T*** ( - V ) = ***T*** (v) untuk semua v di V

c) ***T*** ( v – W ) = ***T*** (v) –***T*** (W) untuk semua v dan w di V

Bukti , misalkan v adalah sebarang vektor di V . Karena 0v = 0 maka kita peroleh

$$\boldsymbol{T(0) = T(0v) = 0T(v) = 0}$$

Yang membuktikan (a)

Juga ***T(-v) = T[(- 1)v] = (- 1) = T (v) –T(v) ,***yang membuktikan (b) .

$$\begin{aligned} T(v - w) &= T(v + (-1)w) \\ &= T(v) + (-1)T(w) \\ &= T(v) - T(w) \end{aligned}$$

Definisi . jika ***T:V*** ***W*** adalah transformasi linear , maka himpunan vektor di ***V*** yang di petakan ***T*** kedalam 0 kita namakan kernel ( ruang nol ) dari ***T*** : himpunan tersebut dinyatakan oleh ***( T )*** . Himpunan semua vektor di ***W*** yang merupakan bayangan di bawah ***T*** dari paling sedikit satu vektor di ***V*** kita namakan jangkauan dari ***T*** : himpunan tersebut dinyatakan oleh ***R ( T)***

Teorema 2 . jika Jika ***T:V*** ***W*** adalah transformasi linear , maka :

a Kernel dari ***T*** adalah subruang dari ***V*** .

b Jangkauan dari ***T*** adalah subruang dari ***W*** .

Bukti

(a) Untuk memperlihatkan bahwa ker($T$ ) adalah subruang , maka kita harus memperlihatkan bahwa ker($T$ ) tersebut tertutup di bawah pertambahan dan perkalian skalar . Misalkan $v_1$ dan $v_2$ adalah vektor –vektor dalam ker($T$ ) , dan misalkan $k$ adalah sembarang skalar . Maka

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Sehingga $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ berada dalam ker($T$ ) . juga ,

$$T(kv_1) = kT(v_1) = k0 = 0$$

Sehingga $kv_1$ berada dalam ker($T$ ) .

(b) Misalkan $W_1 +$ $W_2$ adalah vektor dalam jangkauan $T$ . untuk membuktikan bagian ini maka harus kita perlihatkan bahwa $W_1 + W_2$ dan $kw_1$ berada dalam jangkauan $T$ untuk sebarang skalar $k$ : yakni , ;.Kita harus mencari vektor **a** dan **b** di $V$ sehingga $T(a$ $= W_1 + W_2$ dan $T(b) = KW_1$

Karena $T(a_1) = W_1$ dan $W_2$ berada dalam jangkauan $T$ . maka ada vektor $\mathbf{a_1}$ dan $\mathbf{a_2}$ dalam $V$ sehingga $T(a_1) = W_1$ dan $T(a_2) = W_2$ . misalkan $\mathbf{a} = \mathbf{a_1}$ dan $\mathbf{b} = \mathbf{ka_1}$ . maka

$$T(a) = T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2) = w_1 + w_2$$

Dan $T(b) = T(ka_1) = Kt(a_1) = kw_1$

**Contoh 1**

Tinjaulah basis **S** = {$v_1$ , $v_2$ , $v_3$ } untuk $R^3$ , di mana $v_1$ =( 1,1,1 ) , $v_2$ =( 1,1,0 ) , $v_3$ =( 1, 0,0) dan misalkan $T:R^3$ $R^2$ adalah transformasi linear sehingga

$$T(v_1) = (1,0) \quad T(v_2) = (2, -1) \quad T(v_3) = (4, 3)$$

Carilah rumus untuk {$x_1$ , $x_2$ , $x_3$ ) : kemudian gunakan rumus ini untuk menghitung $T$ ( 2, -3 ,5 ) .

Pemecahan . pertama kita nyatakan **x** = {$x_1$ , $x_2$ , $x_3$ ) sehingga kombinasi linear dari

v1 =( 1,1,1 ) , v2 =( 1,1,0 ) , dan v3 =( 1, 0,0) .jika kita tulis

$$(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{k_1}(1,1,1) + \mathbf{k_2}(1,1,0) + \mathbf{k_3}(1,0,0)$$

Kemudian menyamakan komponen – komponen yang bersesuaian, kita peroleh

$$K_1 + K_2 + K_3 = X_1$$
$$K_1 + K_2 \qquad = X_2$$
$$K_1 \qquad\qquad = X_3$$

Yang menghasilkan $k_1 = x_3$ , $k_2 = x_2 - x_3$ , $k_3 = x_1 - x_2$ sehingga

$$(x_1 , x_2 , x_3 ) = \mathbf{x_3}( 1,1,1 ) + ( \mathbf{x_2 - x_3} )( 1,1,0 ) +( \mathbf{x_1 - x_2} ) ( 1, 0,0)$$
$$= \mathbf{x_3\, v_1 + ( x_2 - x_3 )v_2 + ( x_1 - x_2 )v_3}$$

Jadi $\boldsymbol{T} (x_1 , x_2 , x_3 ) = \mathbf{x_3}\, \boldsymbol{T}( v_1 ) + ( \mathbf{x_2 - x_3} )\boldsymbol{T} ( v_2) +( \mathbf{x_1 - x_2} )\, \boldsymbol{T} (v_3)$

$$= \mathbf{x_3} ( 1,0 ) + ( \mathbf{x_2 - x_3} ) ( 2, -1) +( \mathbf{x_1 - x_2} ) \ (4 ,3)$$
$$= \ ( 4x_1 - 2x_2 - x_3 , 3x_1 - 4x_2 + x_3 )$$

Dari rumus ini kita peroleh

$$T ( 2, -3 ,5 ) = ( 9 , 23)$$

Definisi , .

jika Jika $\boldsymbol{T:V}$ $\qquad$ $\boldsymbol{W}$ adalah transformasi linear , maka : dimensi jangkauan dari $\boldsymbol{T}$ dinamakan ***rank T*** , dan dimensi kernel dinamakan nulitas ***( nullity) T*** .

Contoh 2

Misalkan $\boldsymbol{T : R^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{R^2}$ adalah perputaran dari $R^2$ melalui sudut /4 . jelaslah bahwa jangkauan $\boldsymbol{T}$ secara geometris semuanya adalah $\boldsymbol{R^2}$ dan kernel $\boldsymbol{T}$ adalah { **0**} . maka , $\boldsymbol{T}$ mempunyai rank = 2 dan nulitas = 0.

Contoh 3

Misalkan $\boldsymbol{T : R^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{R^2}$ adalah perkalian oleh sebuah maktriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $m \times n$ . pada contoh 14 kita amati bahwa

Jangkauan $\boldsymbol{T}$ adalah ruang kolom dari $\boldsymbol{A}$

Kernel $\boldsymbol{T}$ adalah ruang pemecahan $\boldsymbol{Ax} = 0$

Jadi , berikutnya bahwa

Rank ( T ) dim ( ruang kolom A ) = rank ( A)

Nulitas ( $\boldsymbol{T}$) = dim ( ruang pemecahan $\boldsymbol{Ax} = 0$ )

**Teorema 3**. (Teorema Dimensi). Jika T:V W adalah transformasi linear dari ruang vektor V yang berdimensi n kepada sebuah ruang vektor W, maka (rank dari T) + (nulitas dari T) = n

Dengan kata lain, teorema ini menyatakan bahwa rank + nulitas dari transformasi linear sama dengan dimensi domainnya.

Dalam kasus khusus dima V = $R^n$ W = $R^m$ , dan T : V W merupakan perkalian oleh sebuah matriks A yang berukuran m x n , berikutnya dari dan Contoh 17 bahwa rank (A) + dim(ruang pemecahan Ax = 0) = n

Jadi, kita punyai teorema berikut.

Teorema 4. Jika A adalah matriks m x n maka dimensi ruang pemecahan dari AX = 0 adalah n – rank(A)

Jelasnya, teorema ini menyatakan bahwa dimensi ruang pemecahan Ax = 0 sama dengan jumlah kolom A kurang rank A.

Contoh 4

Misalkan *T:V W* adalah transformasi nol. Karena *T* memetakan tiap-tiap vektor ke dalam 0, maka **ker *(T)*** = *V*. Karena 0 adalah satu-satunya bayangan yang mungkin di bawah *T*, maka ***R(T)*** terdiri dari vektor nol.

Misalkan *T:$R_n$* $R_m$ adalah perkalian oleh

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kernel dari *T* terdiri dari semua

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Yang merupakan vektor pemecahan dari sistem homogeny

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Jangkuan dari *T* terdiri dari vektor-vektor

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sehingga system

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. http://repository.binus.ac.id/content/K0034/K003481224.pdf diakses pada tanggal 15 April 2016
3. http://tyhatristiawanti.blogspot.co.id/2014/12/sifat-transformasi-liner-kernel-dan.html diakses pada tanggal 15 April 2016
4. https://www.academia.edu/8329228/TRANSFORMASI_LINEAR?auto=download diakses pada tanggal 15 April 2016

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Transformasi Linear dari R-n ke R-m serta matriks transformasi Linear

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | **12** | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui transformasi linear dari R-n ke R-n serta matriks transformasi linear.

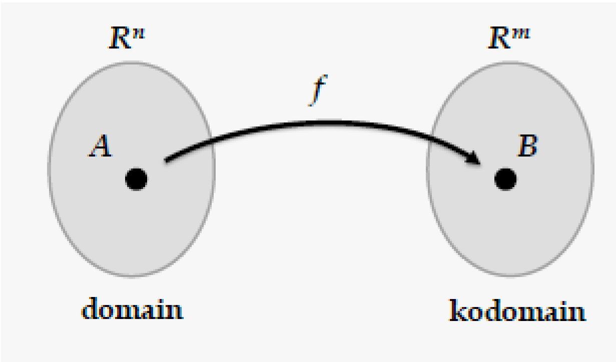

### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami bentuk transformasi linear dari ruang dimensi n ke ruang dimensi m serta memahami matriks transformasinya.

# Transformasi Linear dari R-n ke R-m

Fungsi dalam bentuk w=f(x) dengan vector x di $R^n$ disebut variabel independen dan vector w di $R^m$ disebut variabel dependen. Kasus khusus fungsi tersebut disebut transformasi linear. Transformasi linear merupakan konsep dasar dalam mempelajari aljbar linear dan memiliki aplikasi dalam keteknikan.

Fungsi f; Aturan yang menghubungkan tiap elemen dalam himpunan A ke satu elemen dalam himpunan B.




Transformasi f: $R^n \rightarrow R^m$ ( f memetakan $R^n$ ke $R^m$)

Kasus Khusus: f: $R^n \rightarrow R^m$ disebut operator

| Contoh fungsi | Deskripsi |
|---|---|
| $f(x) = x^2$ | $f: R \rightarrow R$ |
| $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ | $f: R^2 \rightarrow R$ |
| $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ | $f: R^3 \rightarrow R$ |
| $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2$ | $f: R^n \rightarrow R$ |

Transformasi T; $R^n \rightarrow R^m$ didefinisikan dengan persamaan dalam bentuk

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 \\ w_2 &= 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

$$T: R^2 \rightarrow R^3$$

Notasi :

T($x_1$, $x_2$…,$x_n$_=($w_1$,$w_2$…..$w_m$)

Transformasi T; $R^n \rightarrow R^m$ didefinisikan dengan persamaan dalam bentuk

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Notasi matriks:

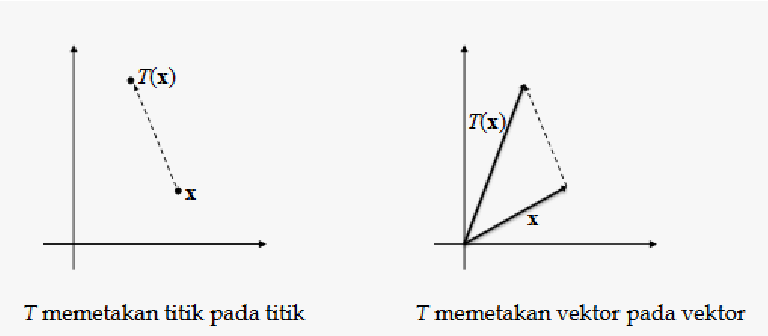
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

W=Ax

T(x) = Ax

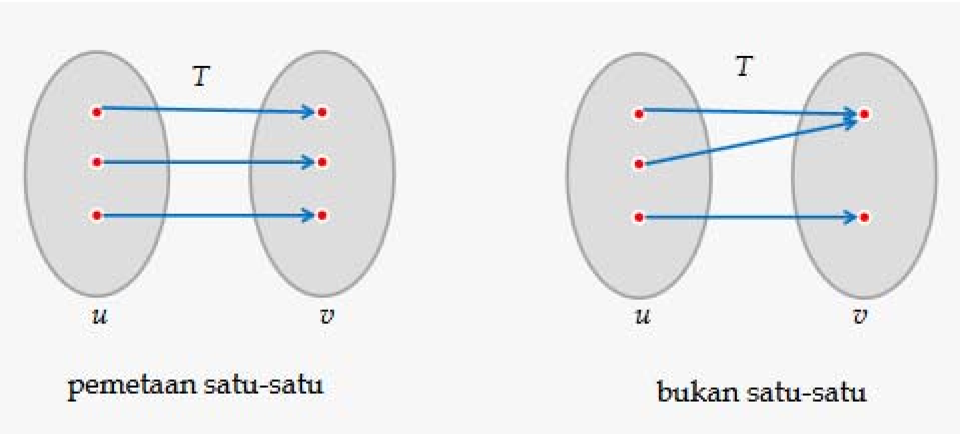
## Referentasi Geometris dari Transformasi Linear

T; $R^n \rightarrow R^m$ mentransformasikan titik ( vector) ke dalam titik 9 vektor) baru




## Pemetaan Satu-Satu

Transformasi linear T; $R^n \rightarrow R^m$ disebut pemetaan satu-satu jika T memetakan vector ( titik) yang berbeda-beda di $R^n$ pada vector ( titik) yang berbeda-beda di $R^m$.



**Teorema pemetaan satu-satu**

Transformasi linear T: $R^n \rightarrow R^m$ merupakan perkalian dengan matriks A (nxn)

1. A dapat dibalik
2. Range transformasi adalah Rn
3. T merupakan pemetaan satu-satu

T: $R^n \rightarrow R^m$ merupakan pemetaan satu-satu dengan matriks A ( nxn) dapat dibalik, maka $T_{A^{-1}}$: $R^n \rightarrow R^m$ merupakan operator linear disebut invers $T_A$

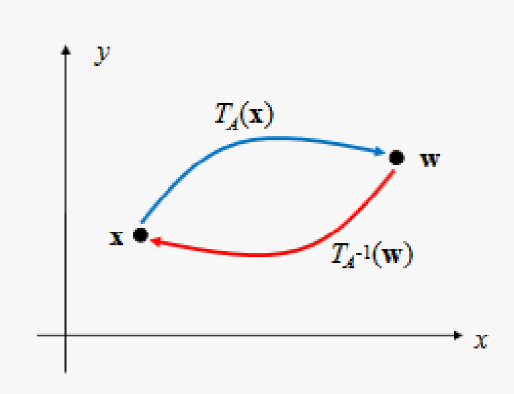
$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$

$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$

**Sudut pandang geometris pemetaan satu- satu**

W adalah image dari x menutur transformasi linear T.

$T_A$-1 ( w) = $T_A$-1 ($T_A$ (x))= x



**sifat linearitas dari transformasi**

Tranformasi T: $R^n \rightarrow R^m$ adalah linear jika dan hanya jika relasi berikut terpenuhi untuk semua vector u dan v di $R^n$ dan scalar k.

$$\text{(a)}\quad T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$\text{(b)}\quad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

Jika: T: $R^n \rightarrow R^m$ adalah transformasi linear dan $e_1, e_2, \ldots e_n$ merupakan vector basis standar untuk Rn, maka matriks standar untuk T adalah

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

Contoh 1

Transformasi linear T: $R^4 \rightarrow R^3$ didefinisikan dengan persamaan:

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

Dapatkan :

a) Notasi matriks transformasi
b) Matirks standar transformasi linear
c) Image dari titik (1,-2,0,3)

Penyelesaian:

a) Notasi matriks transformasi

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

b) Matirks standar transformasi linear

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Image dari titik (1,-2,0,3)

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

**Transformasi Linear**

1. Fungsi merupakan aturan f yang menghubungkan tiap elemen dalam himpunan A (domain dari f) dengan datu dan hanya satu elemen dalam himpunan b ( kodomain dari f)

2. Bila domain fungsi f adalah Rn dan kodomain adalah Rm ( m dan n mungkin sama), maka f disebut pemetaan atau transformasi dari $R^n$ ke $R^{m.}$

3. Operator dalam transormasi yang memetakan elemen di $R^n$ ke $R^m$.

# Matriks Transformasi Linear

Di dalam bagian ini kita memperlihatkan bahwa v dan W adalah ruang vector berdimensi berhingga (tidak perlu Rn dan Rm), maka dengan sedikit kepintaran, setiap transformasi linear T; V→ W dapat dipandang sebagai transformasi matriks.

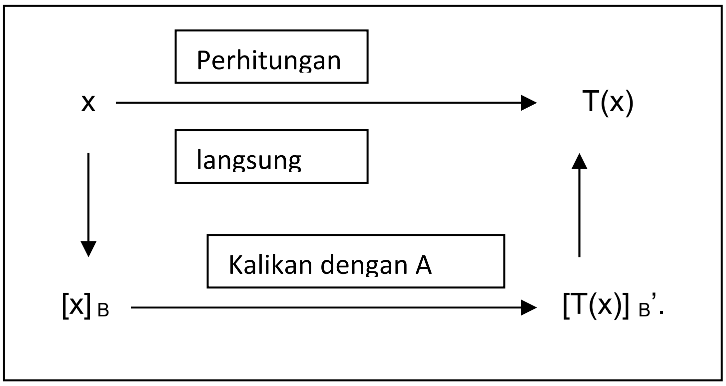
Pemikiran dasarnya adalah memilih basis untuk V dan W dan bekerja dengan matriks kordinat relative terhadap basis ini dan bukan bekerja dengan vector itu sendiri. Secara spesifik misalkan V berdimensi n dan W berdimensi m.

Jika kita memilih basis B dan B' untuk V dan W, maka untuk setiap x di dalam V, matriks kordinat $[x]_B$ akan merupakan sebuah vector di dalam Rn dan matriks kordinat $[T(x)]_B$' akan meupakan suatu vector di dalam Rm. Jadi di dalam proses pemetaan x ke dalam T(x), transformasi linear T'' menghasilkan" sebuah pemetaan dari Rn ke Rm dengan mengirimkan $[x]_B$ ke dalam $[T(x)]_B$'. Dapat diperlihatkan bahwa pemetaan yang dihasilkan ini selalu merupakan $[T(x)]_B$'. Dapat diperlihatkan bahwa pemetaan yang dihasilkan ini selalu merupakan transformasi linear. Dengan ini maka pemetaan tersebut dapat dilangsungkan dengan menggunakan matriks A standar untuk transsformasi ini; yakni

$$[x]_B = [T(x)]_B'.$$

Jika, bagaimanapun, kita dapat mencari matriks A, maka seperti yang diperlihatkan di dalam gambar. T (x) dapat dihitung di dalam tiga langkah menurut prosedur tak langsung berikut:

1. Hitunglah matriks kordinat $[x]_B$
2. kalikanlah $[x]_B$ di sebelah kiri dengan A untuk menghasilkan $[T(x)]_{B'}$.
3. bangunlah kembali T(x) dari matriks kordinatnya $[T(x)]_{B'}$.




Ada dua alasan utama mengapa prosedur tak langsung ini penting.

Pertama: prosedur tersebut menyediakan cara efisien untuk melakukan transformasi linear pada computer digital. Alasan kedua bersifat tearitis, tetapi dengan konsekuensi praktis yang penting. Matriks A bergantung pada basis-basis B dan B'. Biasanya kita kaan memilih B dan B' untuk membuat perhitungan matriks kordinat semudah mungkin. Akan tetapi, sebagai gantinya kita dapat mencoba memilih basis B dan B' untuk membuat matriks A sesederhana mungkin, katakanlah dengan banyak nol. Bila hal ini dilakukan dengan cara yang benar maka matriks A dapat menyediakan informasi penting mengenai transformasi linear T. kita akan terus mempelajari pemikiran ini di dalam bagian yang kemudian.

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. *www.matematrick.com › Kelas X diakses pada tanggal 09 Maret 2016*

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Nilai Eigen dan Vector Eigen

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 13 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui nilai Eigen dan vector Eigen


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam memahami pengertian nilai eigen, vector Eigen serta memahami proses diagonalisasi orthogonal.

# Nilai Eigen

**Definisi**

Sebuah matriks bujur sangkar dengan orde n x n misalkan A, dan sebuah vektor kolom X. Vektor X adalah vektor dalam ruang Euklidian $R^n$ yang dihubungkan dengan sebuah persamaan:

$$AX = \lambda X \tag{7.1}$$

Dimana $\lambda$ adalah suatu skalar dan X adalah vektor yang tidak nol Skalar $\lambda$ dinamakan nilai Eigen dari matriks A. Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks bujur sangkar. Vektor X dalam persamaan (7.1) adalah suatu vektor yang tidak nol yang memenuhi persamaan (7.1) untuk nilai eigen yang sesuai dan disebut dengan vektor eigen. Jadi vektor X mempunyai nilai tertentu untuk nilai eigen tertentu.

Istialah "*eigen*" di dalam bahasa Jerman mempunyai arti "asli" ("proper"). Beberapa penulis menamakan nilai eigen dengan *nilai asli (proper value), nilai karakteristik (characteristie value),* atau *akar laten (latent root)*.

Untuk menentukan nilai eigen λ dari matriks A yang berukuran n x n, kita tinjau kembali
A**x** = λ**x** sebagai A**x** = λI**x** yang dapat ditulis dengan (λI – A)**x** = 0
Bentuk terakhir ini dapat dipandang sebagai system persamaan linear yang homogen. Karena **x** adalah vektor eigen, maka **x** bernilai tidak nol. Ini berarti sistem persamaan linear homogen di atas harus mempunyai penyelesaian tidak nol. Hal ini dapat diperoleh jika dan hanya jika
det(λI – A) = 0
Persamaan ini dinamakan **persamaan karakteristik** dari A. Jika ruas kiri diekspansikan, maka det(λI – A) adalah sebuah polinomial di dalam λ yang kita namakan **polinomial karakteristik** dari A.

**Teorema :** Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekivalen satu sama lain.

(a) λ adalah nilai eigen dari A

(b) Sistem persamaan (λI – A)**x** = 0 mempunyai penyelesaian yang tak trivial.

(c) Ada sebuah vektor tak nol **x** di dalam Rn sehingga A**x** = λ**x**.

(d) λ adalah penyelesaian real dari persamaan karakteristik det (λI – A) = 0

Contoh 1.

Misalkan Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, Apabila matriks A dikalikan dengan X maka:

$$AX = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda X$$

Dengan konstanta $\lambda = 4$ dan

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Memenuhi persamaan (7.1). Konstanta $\lambda = 4$ dikatakan nilai eigen dari matriks bujur sangkar $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Contoh 2.

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriks A dikalikan X didapat:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+2 \\ 2+1+0 \\ 3+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda X$$

dengan $\lambda = 3$ adalah nilai eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Perhitungan nilai eigen**

Kita tinjau perkalian matriks A dan X dalam persamaan (7.1) apabila kedua sisi dalam persamaan tersebut dikalikan dengan matriks identitas didapatkan:

$$IAX = I\lambda X$$

$$AX = \lambda IX$$

$$\boxed{[\lambda I - A]X = 0} \qquad (7.2)$$

Persamaan (7.2) terpenuhi jika dan hanya jika:

$$\boxed{\det\ [\lambda I - A]} \qquad (7.3)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (7.3) dapat ditentukan nilai eigen ($\lambda$) dari sebuah matriks bujur sangkar A tersebut/

Contoh 3.

Dapatkan nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

Dari persamaan (7.3) maka:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

Dengan menggunakan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.1}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

Maka penyelesaian adalah: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Nilai eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ dan } \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

Contoh 4.

Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

Nilai eigen ditentukan dari persamaan:

$$\det \left[\lambda I - A\right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Penyelesaian persamaan tersebut adalah:

$$\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 3$$

dan

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

Jadi nilai eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = 2$.

# Vektor Eigen

**Perhitungan Vektor Eigen**

Kita tinjau kembali persamaan $AX = \lambda X$ dimana A adalah matriks bujur sangkar dan X adalah vektor bukan nol yang memenuhi persamaan tersebut. Dalam persamaan 7.1 telah dibahas tentang perhitungan nilai eigen dari matriks A( $\lambda$ ), pada subbab ini kita bahas vektor yang memenuhi persamaan tersebut yang disebut vektor eigen(vektor karakteristik) yang sesuai untuk nilai eigennya.

Kita tinjau sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 berikut:

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Persamaan $AX = \lambda X$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (7.4)$$

Persamaan (7.4) dikalikan dengan identitas didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (7.5)$$

Persamaan (7.5) dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Persamaan (7.6) adalah sistem persamaan linier homogen, vektor dalam ruang $R^n$ yang tidak nol didapatkan jika dan hanya jika persamaan tersebut mempunyai solusi non trivial untuk nilai eigen yang sesuai.

Contoh. 5

Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

Pada contoh 4 nilai eigen didapatkan $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$, vektor eigen didapatkan dengan persamaan:

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $\lambda = 2$ maka:

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + 3x_2 &= 0 \\
2x_1 - x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Solusi non trivial sistem persamaan ini adalah:

$$2x_1 = x_2$$

Misalkan $x_1 = r$ maka $x_2 = 2r$

Vektor eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 2$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix}$ dimana $r$ adalah bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 3$ maka:

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + 3x_2 &= 0 \\
2x_1 - 2x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Solusi non trivial sistem persamaan tersebut adalah:

$$x_1 = x_2$$

Misalkan $x_1 = s$ maka vektor eigen untuk $\lambda = 3$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$ dimana s adalah senbarang bilangan yang tidak nol.

Contoh 6.

Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

Nilai eigen dari matriks didapatkan dari persamaan

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda-4) & 0 & 1 \\ -2 & (\lambda-1) & 0 \\ -2 & 0 & (\lambda-1) \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda-4)\left[(\lambda-1)^2\right] + 2(\lambda-1) = 0$$

$$(\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-4)+2\right] = 0$$

$$(\lambda-1)\left[\lambda^2 - 5\lambda + 6\right] = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Nilai eigen matriks tersebut adalah:

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 3$$

Vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (4-\lambda) & 0 & 1 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 \\ -2 & 0 & (1-\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 0 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$3x_1 = -x_3$$

$$x_2 = 0$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -3x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = p$ maka vektor eigenya adalah:

$X = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ -3p \end{bmatrix}$ dengan p adalah bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 2$

Sistem persamaan linier yang sesuai adalah:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 0 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 0 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$2x_1 = -x_3$$

$$-2x_1 = x_2$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = s$ maka vektor eigennya adalah:

$$X = \begin{bmatrix} s \\ -2s \\ -2s \end{bmatrix}$$ dengan s bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 3$

Sistem persamaan liniernya adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 0 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi trivialnya adalah:

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_3$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_2 = -x_1$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = t$ maka

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix}$$ dengan t bilangan sembarang yang tidak nol.

**Latihan**

1. Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

2. Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. Dapatkan Nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

4. Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

5. Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

## Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. *nuralif.staff.umm.ac.id/files/2010/06/Aljab7.doc diakses pada tanggal 18 april 2016*

MODUL PERKULIAHAN

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Aplikasi Aljabar Linear pada Persamaan Differensial

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 14 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui aplikasi aljabar linear pada persamaan differensial.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam menggunakan vector pada persamaan differensial, dan deret Fourier.

# Persamaan Diferensial

Pada umumnya dikenal dua jenis persamaan difrensial yaitu Persamaan Difrensial Biasa PDB dan Persamaan Difrensial Parsial PDP. Untuk mengetahui perbedaan kedua jenis persamaan difrensial itu dapat dilihat dalam definisi berikut.

Definisi

Persamaan Difrensial Suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut Persamaan Difrensial. Selanjutnya jika turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas maka disebut Persamaan Difrensial Biasa (PDB)

dan bila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut Persamaan Difrensial Parsial (PDP).

Berdasarkan banyaknya variabel bebas, Persamaan Differensial dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

1. **Persamaan Differensial Biasa**, yaitu persamaan differensial yang mengandung hanya **satu** variabel bebas

   **Contoh :** 1. $\dfrac{dy}{dx} = -kx$

   2. $y'' + 3y' + 2 = \sin x$

   3. 4. $y'' + \sqrt{y' + 1} = x$

2. **Persamaan Differensial Parsial**, yaitu persamaan differensial yang mengandung **lebih dari satu** variabel bebas.

   **Contoh :** 1. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = x + y\dfrac{\partial y}{\partial z}$

   2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} + z = 0$

**Definisi : Tingkat (*Ordo*)** suatu PD adalah tingkat turunan tertingi yang terlibat dalam PD tersebut.

**Derajat (*degree*)** suatu PD adalah pangkat dari turunan ordo tertinggi jika PD tersebut ditulis sebagai polinomial dalam turunan.

**Contoh** :

1. $\dfrac{dy}{dx} = -kx$ PD tingkat 1 derajat 1
2. $y'' + 3y' + 2 = \sin x$ PD tingkat 2 derajat 1
3. $y''' + (y'')^2 = y'$ PD tingkat 2 derajat 2
4. $y'' + \sqrt{y' + 1} = x$ PD tingkat 2 derajat 2

**Definisi** :Suatu persamaan yang tidak lagi memuat turunan dan memenuhi satu persamaan differesial disebut **penyelesaian persamaan differensial**.

**Contoh** : Persamaan $y = x^2 + x + C$ merupakan selesaian dari PD: $y'' + y' = 2x + 3$ sebab $y' = 2x + 1$ dan $y'' = 2$ sehingga $y'' + y' = (2x + 1) + 2 = 2x + 3$.

Penyelesaian suatu persamaan diferensial dibedakan menjadi 2 yaitu :

**a. Penyelesaian Umum Persamaan Differensial (PUPD),** adalah selesaian PD yang masih memuat memuat konstanta penting (konstanta sebarang).

**b. Penyelesaian Partikulir/Khusus Persamaan Differensial (PPPD/PKPD),** adalah selesaian PD yang diperoleh dari PUPD dengan mengganti konstanta penting dengan konstanta yang memenuhi syarat awal atau syarat batas.

**Contoh :**

PD $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ditulis $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ sehingga $d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0dx$.

Jika kedua ruas diintegralkan, diperoleh $\int d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \int 0\,dx$ sehingga $\dfrac{dy}{dx} = C_1$.

Persamaan terakhir diubah bentuk menjadi $dy = C_1 dx$ .

Dengan mengintegralkan kembali kedua sisi diperoleh PUPD : $y = C_1 x + C_2$, dengan $C_1$ dan $C_2$ konstanta sebarang.

Jika PD tersebut memenuhi $y = 1$ untuk $x = 0$ dan $y = 4$ untuk $x = 1$ akan diperoleh $C_1 = 3$ dan $C_2 = 1$. Diperoleh PPPD : $y = 3x + 1$.

**Persamaan Differensial Terpisah Dan Mudah Dipisah**

**Bentuk Umum PD dengan variable terpisah** :

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh PUPD :

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

**Contoh:** Selesaikan PD:

1. $x^3 dx + (y + 1)dy = 0$
2. $e^x\,dx + \dfrac{e^y}{e^y + 1}dy = 0$

**Penyelesaian :**

1. Dengan mengintegralkan kedua ruas $\int x^3 dx + \int (y+1)dy = C$, diperoleh PUPD : $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(y+1)^2 = C$. Bentuk terakhir disajikan pula dengan PUPD : $x^4 + 2(y+1)^2 = C$.

2. Dengan mengintegralkan kedua ruas $\int e^x dx + \int \dfrac{e^y}{e^y+1}dy = C$, diperoleh

   $\int e^x dx + \int \dfrac{d(e^y+1)}{e^y+1} = C$ sehingga PUPD : $e^x + \ln(e^y + 1) = C$.

Bentuk Umum **PD dapat dipisah**:

$$f(x)g(y)\,dx + p(x)q(y)\,dy = 0$$

Penyelesaian PD tersebut adalah membagi kedua ruas dengan $g(y)\ p(x)$, sehingga diperoleh

$$\frac{f(x)}{p(x)}dx + \frac{q(y)}{g(y)}dy = 0$$

Dengan mengintegralkan didapat PUPD : $\int \frac{f(x)}{p(x)}dx + \int \frac{q(y)}{g(y)}dy = C$

**Contoh :** Selesaikan PD :

1. 4 *y dx* + 2*x dy* = 0
2. $x^2(y + 1)\,dx + y^2\,(x - 1)\,dy = 0$

**Penyelesaian :**

1. Membagi kedua ruas dengan *xy*, diperoleh $\frac{4}{x}dx + \frac{2}{y}dy = 0$. Dengan mengintegralkan kedua ruas $\int \frac{4}{x}dx + \int \frac{2}{y}dy = C_1$ diperoleh PUPD : $4\ln x + 2\ln x = C_1$. Bentuk terakhir dapat diubah ke bentuk PUPD : $\ln x^4 y^2 = \ln C$. Selanjutnya dapat pula disederhanakan menjadi PUPD : $x^4\, y^2 = C$.

2. Jika kedua ruan dibagi dengan (*y* + 1).(*x* – 1) PD menjadi $\frac{x^2}{x-1}dx + \frac{y^2}{y+1}dy = 0$.

   Kedua ruas diintegralkan $\int \frac{x^2}{x-1}dx + \int \frac{y^2}{y+1}dy = C$. Untuk memperoleh hasilnya, diubah menjadi $\int \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1}dx + \int \frac{y^2 - 1 + 1}{y+1}dy = C$. Bentuk ini diubah menjadi

   $$\int (x + 1 + \frac{1}{x-1})dx + \int (y - 1 + \frac{1}{y+1})dy = C,$$

   diperoleh PUPD : $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln|x-1| + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \ln|y+1| = C$.

Untuk selanjutnya penulisan persamaan diferensial dalam bab ini disajikan sebagai :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

**Persamaan Differensial Homogen**

Untuk dapat menyelesaikan sebuah persamaan diferensial homogen/non homogen, terlebih dahulu harus difahami pengertian fungsi homogen.

**Fungsi** $f(x, y)$ dikatakan **homogen** berderajat *n*, jika memenuhi

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, dengan $\lambda$ suatu konstanta.

**Contoh :**

1. Fungsi $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ merupakan fungsi yang homogen berderajat 2, sebab

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2$$

$$= \lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 xy + \lambda^2 y^2$$

$$= \lambda^2 (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= \lambda^2 f(x, y)$$

2. Fungsi $f(x, y) = x \sin \frac{x}{y} + y \cos \frac{y}{x}$ merupakan fungsi homogen berderajat 1, sebab

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x) \sin \frac{\lambda x}{\lambda y} + (\lambda y) \cos \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$= \lambda x \sin \frac{x}{y} + \lambda y \cos \frac{y}{x}$$

$$= \lambda f(x, y)$$

3. Fungsi $f(x, y) = xy + \sin xy$ **bukan** fungsi homogen sebab

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) + \sin(\lambda x)(\lambda y)$$

$= \lambda^2 xy + \sin \lambda^2 xy$

$\neq \lambda^n f(x, y)$

Persamaan Differensial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ dikatakan suatu **PD homogen** jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ masing-masing merupakan fungsi homogen **berderajat sama**. Penyelesaian PD homogen dapat dilakukan dengan subtitusi :

$y = v\,x$ dan $dy = vdx + xdv$

pada persamaan $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Dari substitusi ini akan didapatkan PD dengan variabel *x* dan *v* yang dapat dipisah, sehingga dapat dicari penyelesaiannya.

**Contoh :** Selesaikan PD $(x^3 - y^3)dx + 2xy^2 dy = 0$.

**Penyelesaian :**

Dapat ditunjukkan bahwa $x^3 - y^3$ dan $2xy^2$ merupakan fungsi-fungsi yang homogen berderajat 3.

Misalkan $y = vx$ sehingga $dy = vdx + xdv$

PD menjadi : $(x^3 - v^3 x^3)dx + 2xv^2 x^2 (vdx + xdv) = 0$

$$(x^3 - v^3 x^3 + 2v^3 x^3)dx + 2v^2 x^4 dv = 0$$

$$x^3 (1 + v^3)dx + 2v^2 x^4 dv = 0$$

Kedua ruas dibagi $(1 + v^3)x^4$, diperoleh $\frac{x^3}{x^4}dx + \frac{2v^2}{1 + v^3}dv = 0$ yang merupakan PD terpisah. Dengan mengintegralkan diperoleh PUPD: $\ln x + \frac{2}{3}\ln\left|1+v^3\right| = \ln A$.

Bentuk ini dapat diubah nmenjadi : $x(1+v^3)^{2/3} = A$

Jadi PUPD : $x(1+\frac{y^3}{x^3})^{2/3} = A$, dapat dituliskan sebagai : $(x^3 + y^3)^{2/3} = Ax$.

**Persamaan Differensial Eksak**

Suatu persamaan diferensial tingkat satu derajat satu yang berbentuk :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

disebut **Persamaan Differensial Eksak**, jika dan hanya jika :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

**Contoh :** Selidikilah apakah persamaan diferensial $(2xy + \ln x)dx + x^2 dy = 0$ merupakan persamaan eksak

**Penyelesaian :**

$$M(x,y) = 2xy + \ln x \qquad N(x,y) = x^2$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

Karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$, makaPD tersebut Eksak.

**Penyelesaian Persamaan Diferensial Eksak**

Pandang Persamaan $F(x,y)=C$, dengan *C* konstanta sebarang. Differensial total dari ruas kiri adalah $d\,F(x,y)$ yaitu :

$$dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

Karena diferensial ruas kanan adalah *dC = 0*, diperoleh

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=0$$

Jika bentuk di atas dianalogkan dengan $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ , diperoleh :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

sehingga PUPD Eksak : $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ berbentuk $F(x,y)=C$. Akibatnya, penyelesaian PD eksak tersebut dapat diperoleh dari kedua bentuk di atas, yaitu :

a. $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$

Jika kedua ruas diintegralkan terhadap *x*, maka

$$F(x,y)=\int_x M(x,y)dx+g(y)$$

(Catatan : $\int_x$ menyatakan bahwa dalam integral tersebut, *y* dipandang sebagai konstanta, dan *g(y)* adalah konstanta sebarang hasil pengintegralan yang harus dicari). Untuk mencari *g(y)*, bentuk *F(x,y)* di atas didiferensialkan ke-*y*, yaitu :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)dx\right] + \frac{dg(y)}{dy}$$

atau

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)dx\right] + g'(y)$$

Karena $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, maka $\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)dx\right] + g'(y) = N(x,y)$ sehingga

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)dx\right]$$

Karena $\frac{dg(y)}{dy} = g'(y)$ merupakan fungsi *y* saja, maka dengan pengintegralan terhadap *y* akan diperoleh $g(y)$.

b. Cara lain untuk mencari penyelesaian persamaan (1) adalah dengan mengambil

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ sehingga

$$F(x,y) = \int_y N(x,y)dy + g(x)$$

Bentuk di atas dideferensialkan terhadap *x* untuk mendapatkan *g(x)*, yaitu

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_y N(x,y)dy\right] + \frac{dg(x)}{dx}$$

atau

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_y N(x,y)dy\right] + g'(x)$$

Karena $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ , maka $g'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_y N(x,y)dy\right]$

Karena *g'(x)* adalah fungsi *x* saja, maka dengan mengintegralkan terhadap *x* akan dapat diperoleh *g(x)*.

**Contoh :** Selesaikan PD : $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$

**Penyelesaian :** Terlebih dahulu akan diuji apakah PD diatas Eksak/bukan.

$M(x,y) = x + y$ $\qquad\qquad$ $N(x,y) = x - y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$ , maka PD diatas Eksak. Salah satu cara berikut dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian PD tersebut.

a. Jika diambil $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = x + y$ , maka

$$F(x,y) = \int_x (x+y)dx + g(y)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + xy + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x + g'(y)$$

Karena $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x - y$ , maka

$$x + g'(y) = x - y$$

$$g'(y) = -y$$

$$g(y) = \int -y\, dy = -\frac{1}{2}y^2$$

Jadi PUPD : $\dfrac{1}{2}x^2 + xy - \dfrac{1}{2}y^2 = C$ , dapat pula ditulis $x^2 + 2xy - y^2 = K$ .

b. Jika diambil $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x - y$ , maka

$$F(x,y) = \int_y (x - y)dy + g(x)$$

$$= xy - \frac{1}{2}y^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y + g'(x)$$

Karena $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = x + y$ , maka

$$y + g'(x) = x + y$$

$$g'(x) = x$$

$$g(x) = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2$$

Jadi PUPD : $xy - \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}x^2 = C$ , dapat pula ditulis $x^2 + 2xy - y^2 = K$ .

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. http://clikmatematika88.blogspot.co.id/2012/02/persamaan-diferensial.html *di akses 12 April 2016*

MERCU BUANA
UNIVERSITAS

**MODUL PERKULIAHAN**

# Matriks Dan Aljabar Linear

## Aplikasi Aljabar Linear pada Bentuk Kuadrat

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Fakultas Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 15 | MK15009 | Tim Dosen |


### Abstract

Modul ini memberikan gambaran secara umum pembahasan dalam mengetahui aplikasi aljabar linear pada bentuk kwadrat.


### Kompetensi

Mahasiswa diharapkan mampu dalam menggunakan vector pada bentuk kwadrat.

# Bentuk Kuadrat

## A. Bentuk-bentuk Kuadrik

Pada bahasan diskusi pembelajaran modul yang kedua, kita telah mendefinisikan sebuah persamaan linear dalam n variabel $x_1$, $x_2$. $x_3$, ..., $x_n$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$. Ruas kiri persamaan ini, yaitu $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ merupakan sebuah fungsi dalam n variabel (fungsi peubah n), yang dinamakan **bentuk linear**. Pada bahasan pembelajaran yang sekarang ini, kita akan mendiskusikan beberapa fungsi yang dinamakan **bentuk kuadrat** yang suku-sukunya adalah kuadrat dari variabel atau hasil kali dua variabel. Bentuk kuadrat timbul dalam berbagai penerapan seperti dalam getaran, relativitas, geometri, statistika, mekanis dan berbagai rekayasa elektris.

Sebuah persamaan yang berbentuk $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.....................(15) dengan a, b, c, …, f adalah bilangan-bilangan real dengan a, b, dan c tidak sekaligus nol, dinamakan sebuah **persamaan kuadrat dalam x dan y**. Sedangkan pernyataan

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ ......................................................................... (16) dinamakan **bentuk kuadrat terasosiasi** (*associated quadratic form*) atau bentuk kuadrat dalam 2 variabel.

**Contoh 1.**

Berikut adalah beberapa bentuk kuadrat dalam x dan y

a) $2x^2 + 6xy – 7y^2$ (a = 2, b = 3, c = -7).

b) $4x^2 – 5y^2$ (a = 4, b = 0, c = -5).

c) xy (a = 0, b =1/2 , c = 0)

Jika pada matriks 1x 1 tanda kurung dihilangkan, maka (16) dapat kita tulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ..................................... (17)

Silakan Anda buktikan dengan mencoba mengalikan matriks-matriks tersebut.

Perhatikan bahwa matriks 2x 2 pada persamaan (17) ternyata adalah matriks simetris dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah koefisien suku-suku yang dikuadratkan, sedangkan unsur-unsur diagonal lainnya adalah setengah koefisien suku hasil kali xy.

Bentuk kuadrat berikut tidak terbatas pada dua variabel

a) $2x^2 + 6xy - 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

b) b) $4x^2 - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c) c) $xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Bentuk kuadrat yang lebih umum didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi**. Bentuk kuadrat dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu ekspresi yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (18)$$

dengan A adalah suatu matriks n x n yang simetris. Jika kita misalkan matriks

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka (17) bisa ditulis secara lebih ringkas dalam bentuk

$\mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}$ ........................................................................... (19)

Matriks A yang simetris ini dinamakan matriks **dari bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t$** A **x**.

Matriks-matriks simetris berguna, namun tidak begitu penting untuk menyajikan bentuk kuadrat dalam notasi matriks. Misalnya, untuk bentuk kuadrat pada contoh 12. 6a, yaitu $2x^2 + 6xy - 7y^2$, kita boleh memisalkan menguraikan koefisien suku-suku hasil kali yaitu 6 menjadi 5 + 1 atau 4 + 2, dan menuliskan sebagai berikut:

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

atau

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Namun matriks-matriks simetris biasanya memberikan hasil yang paling sederhana, sehingga kita akan selalu menggunakannya. Jadi, jika kita menyatakan suatu bentuk kuadratik dengan $\mathbf{x}^t$ A $\mathbf{x}$ akan dipahami bahwa A simetris, walaupun tidak dinyatakan secara eksplisit.

Jika kita menggunakan fakta bahwa A adalah simetris, yaitu A = $A^t$, maka (19) dapat dinyatakan dalam bentuk hasil kali dalam Euclid dengan menuliskan

$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{x}^t A^t \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^t \mathbf{x} = < \mathbf{x} , A\mathbf{x} >$ ................................ (20)

**Contoh 2**

Berikut adalah sebuah bentuk kuadrat dalam $x_1$, $x_2$, dan $x_3$:

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4\, x_1x_2 - 2\, x_1x_3 + 6x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa koefisien dari suku-suku kuadrat tampil pada diagonal utama matriks 3 3, sedangkan koefisien dari suku hasil kali dipisahkan setengah-setengah dan disimpan pada posisi-posisi bukan diagonal, yaitu seperti berikut:

| Koefisien dari | Kedudukan dalam matriks A |
|---|---|
| $x_1x_2$ | $a_{12}$ dan $a_{21}$ |
| $x_1x_3$ | $a_{13}$ dan $a_{31}$ |
| $x_2x_3$ | $a_{23}$ dan $a_{32}$ |

## B. Penerapan pada Bagian Kerucut (Konik)

Dalam bahasan diskusi pembelajaran ini kita akan melihat bagaimana menghilangkan suku hasil kali dari sebuah bentuk kuadrat, yaitu dengan cara mengganti variabel, dan kita akan menggunakan hasilnya untuk mengkaji grafik bagian kerucut (irisan atau penampang kerucut, atau *conic section*).

Misalkan

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{.................... (21)}$$

adalah bentuk kuadrat dengan A berupa matriks simetris. Dari Teorema 11. 4 pada Modul 11 kita mengetahui bahwa ada suatu matriks ortogonal P yang mendiagonalisasi A, yaitu

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{.................................................... (22)}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A. Jika kita misalkan

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dengan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah variabel-variabel baru, dan jika kita melakukan substitusi

$\mathbf{x} = P\,\mathbf{y}$

pada (21), maka akan kita dapatkan

$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = (P\,\mathbf{y})^t A P \mathbf{y} = \mathbf{y}^t P^t A P \mathbf{y} = \mathbf{y}^t D \mathbf{y}$

Namun

$$\mathbf{y}^t D \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

yang merupakan bentuk kuadrat tanpa suku-suku hasil kali.

Secara ringkas uraian pembelajaran di atas dapat kita tulis dalam bentuk teorema berikut:

**Teorema 12. 1**. Misalkan $\mathbf{x}_t$ A $\mathbf{x}$ adalah bentuk kuadrat dalam variable-variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dengan A simetris. Jika P mendiagonalkan A secara ortogonal dan jika variabel-variabel baru $y_1, y_2, ..., y_n$ didefinisikan oleh persamaan **x** = P **y**, maka dengan mensubstitusikan persamaan ini ke dalam $x_t$ A x menghasilkan

$\mathbf{x}_t A \mathbf{x} = \mathbf{y}$" $D \mathbf{y} = \lambda_1 y_{12} + \lambda_2 y_{22} + \ldots + \lambda_{n2}\, y_{n2}$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A dan D = $P_t$ A P.

Matriks P pada teorema ini dinamakan **mendiagonalkan secara ortogonal bentuk kuadrat** atau **mereduksi bentuk kuadrat menjadi suatu jumlah kuadrat.**

**Contoh 3**

Carilah penggantian variabel yang mereduksi bentuk kuadrat $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x^2$ menjadi sebuah jumlah kuadrat, dan nyatakan bentuk kuadrat itu dalam variabel-variabel yang baru.

**Penyelesaian**

Bentuk kuadrat tersebut dapat dituliskan seperti berikut

$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (Dari (16) dan (17))

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

det (λ I – A) = 0

det $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$ = $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

sehingga nilai-nilai eigen A adalah λ = 1 dan λ = 3.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ = 1 didapat dari penyelesaian (λ I – A) x = 0

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = x_2$

$x_1 = t$

$x_2 = t$

$$x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Dengan proses Gram-Schmidt kita dapatkan basis ortonormal

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Demikian pula untuk $\lambda_2 = 3$, kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = x_2$

$x_1 = t$

$x_2 = t$

$$x = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Dengan proses Gram-Schmidt kita dapatkan basis ortonormal

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Jadi bentuk P yang mendiagonalisasi matriks simetris A secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya substitusikan **x** = P **y** yang menghilangkan suku-suku hasil kali adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

Bentuk kuadrat yang baru adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$= y_1^2 + 3y_2^2$.

Selanjutnya bahasan diskusi pembelajaran sekarang akan menerapkan kerja kita tentang bentuk-bentuk kuadrat untuk mengkaji **persamaan-persamaan kuadrat dalam** x **dan** y dan **bentuk-bentuk kuadratnya**. Bentuk-bentuk ini telah kita tulis sebagai persamaan (15) dan (16). Bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel x dan y, yaitu

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ................................. (15)

grafiknya dinamakan **bentuk-bentuk kerucut** atau **konik** (*conics*), atau dikenal pula sebagai **irisan kerucut** atau **penampang kerucut**, atau **bagian kerucut** (*conic section*). Irisan-irisan kerucut yang paling penting adalah ellips, lingkaran, hiperbola, dan parabola. Irisan-irisan kerucut ini disebut **irisan-irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi** (*nondegenerate conics*). Jika benda dalam **posisi standar** (*standard position*) relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat (Gambar 12. 4). Irisan-irisan kerucut sisanya disebut **mengalami degerasi** (*degenerate*) yang mencakup titik-titik tunggal dan pasangan-pasangan garis.

**Contoh 4**

a) Persamaan

   $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ mempunyai bentuk $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ dengan k = 2 dan l = 3.

   Jadi grafiknya berupa ellips pada posisi standar yang memotong sumbu x di titik (-2 , 0) dan (2 , 0), dan memotong sumbu y di titik (0 , -3) dan (0 , 3).

b) Persamaan

$x^2 - 8y^2 + 16 = 0$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{16} = 1$$

atau $\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1$ denga $k = \sqrt{2}$ dan $l = 4$.

Grafiknya berupa hiperbola pada posisi standar yang memotong sumbu y pada (0 , - 2 ) dan (0 , 2 ).

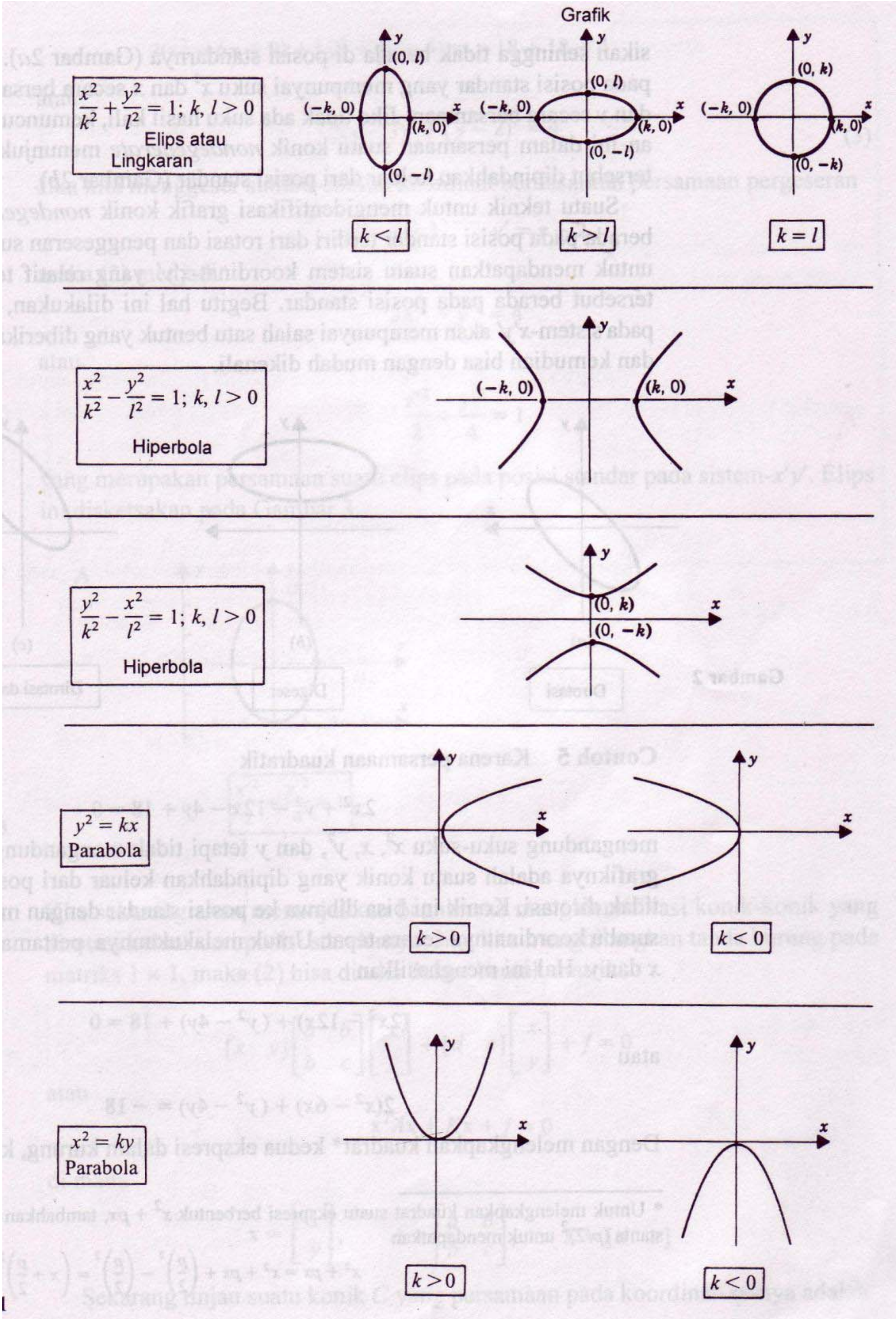
c) Persamaan

$5x^2 + 2y = 0$ bisa ditulis ulang dalam bentuk

$$x^2 = -\frac{2}{5}y$$

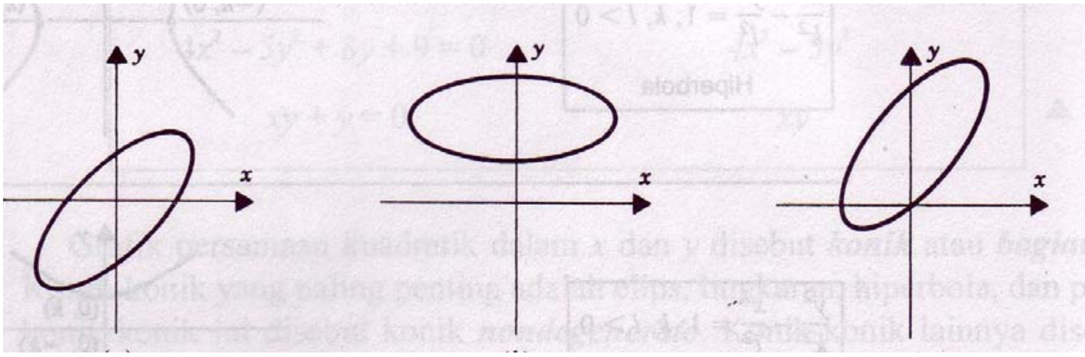
atau $x_2 = ky$ dengan $k = -\frac{2}{5}$

Karena $k < 0$, grafiknya berupa parabola pada posisi standar yang membuka ke bawah dengan sumbu simetri adalah sumbu y.


Grafik
x²/k² + y²/l² = 1; k, l > 0
Elips atau Lingkaran
(0, l)
(−k, 0)
(k, 0)
(0, −l)
k < l
k > l
k = l
(0, k)
(0, −k)
x²/k² − y²/l² = 1; k, l > 0
Hiperbola
y²/k² − x²/l² = 1; k, l > 0
Hiperbola
y² = kx
Parabola
k > 0
k < 0
x² = ky
Parabola
k > 0
k < 0

**Gambar 15.1**

Jika kita amati irisan kerucut pada posisi standar ternyata persamaannya tidak memuat suku-suku hasil kali (suku-suku xy). Keberadaan suku-suku xy dalam persamaan irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi, menunjukkan bahwa irisan kerucut itu diputar (dirotasikan dari posisi standarnya). (Gambar 12. 5a). Juga tidak ada irisan kerucut dalam posisi standar yang sekaligus memuat suku $x^2$ dan x atau suku-suku $y^2$ dan y secara bersamaan. Jika tidak ada suku hasil kali, munculnya kedua pasangan ini dalam persamaan suatu irisan kerucut *nondegenerate* menunjukkan bahwa irisan kerucut itu dipindahkan atau digeser (ditranslasikan) dari posisi standar (Gambar 12. 5b).




(a) Diputar (rotasi)     (b) Digeser (translasi)     (c) Diputar dan digeser

**Gambar 15.2**

Bagaimana untuk mengidentifikasi grafik bentuk irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi tetapi tidak berada pada kedududkan standar? Hal ini bisa terjadi disebabkan oleh rotasi dan translasi sumbu-sumbu koordinat xy untuk mendapatkan suatu sistem koordinat x‟ y‟ yang relatif terhadap irisan kerucut ini berada dalam posisi standar. Begitu ini dikerjakan, maka persamaan irisan kerucut pada sistem x‟ y‟ akan berbentuk salah satu di antara yang diberikan dalam Gambar 12. 4, sehingga dengan mudah kita kenali.

# Daftar Pustaka


1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. Karso. *file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR.../MODUL_12_**ALJABAR_LINEAR**_2006.pdf* diakses pada tanggal 18 mei 2016